

En cada uno de los problemas 1 y 2 elija **una sola opción**. Conteste a los problemas **utilizando el anverso y reverso de esta hoja** (puede pedir hojas adicionales si las necesita). Puede dejar sus resultados expresados como fracciones o raíces, no se requiere usar números decimales. (*In each of problems 1 and 2 choose **only one option**. Answer the problems **using the front and back of this sheet** (you may ask for additional sheets if needed). You may leave your results expressed as fractions or roots, using decimal numbers is not required*).

1 Elija **solo una** de las dos opciones siguientes [2.5 pts] (*Choose **only one** of the following two options [2.5 pts]*):

- a) Una pista de atletismo debe tener un perímetro de 400m. Su forma se puede aproximar por un rectángulo con un semicírculo en cada uno de dos lados opuestos. Hallar las dimensiones de la pista para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible. A la vista de este resultado, ¿podrá incluirse una pista de rugby –cuyo área típica oscila entre los 7000 y los 10000 metros cuadrados– en ese área rectangular?. Justifique matemáticamente su respuesta. (*An athletics track must have a perimeter of 400m. Its shape can be approximated by a rectangle with a semicircle on each of two opposite sides. Find the dimensions of the track so that the area of the rectangular part is as large as possible. In view of this result, can a rugby pitch –whose typical area ranges between 7000 and 10000 square meters– be included in that rectangular area?. Justify your answer mathematically*).
- b) Para determinar el calor emitido por un radiador térmico de los que se utilizan en los hogares durante el invierno, hay que evaluar la energía emitida por cada frecuencia de luz en un determinado intervalo. Como las frecuencias varían de manera continua, hay que hacer una suma infinita, que se aproxima mediante una integral definida. Para un determinado radiador, la cantidad de calor emitida está dada por la integral: (*To determine the heat emitted by a thermal radiator such as those used in homes during winter, one must evaluate the energy emitted by each frequency of light in a certain interval. As frequencies vary continuously, an infinite sum must be made, which is approximated by a definite integral. For a certain radiator, the amount of heat emitted is given by the integral:*)

$$I = \int_1^5 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx,$$

medida en ciertas unidades. Una habitación de 20 m^2 necesita unas 120 unidades de calor para alcanzar una temperatura confortable, estime razonadamente si es suficiente un radiador para este fin (no necesita hacer cálculos con decimales, solo proporcionar una estimación razonada; por ejemplo, puede decir que $128/5$ es aproximadamente $125/5 = 25$ porque la diferencia entre los numeradores 128 y 125 es menor que el denominador, o que $225/4$ es aproximadamente 55 porque $50 \times 4 = 200$, $60 \times 4 = 240$, y 225 está entre 200 y 240). (*measured in certain units. A 20 m^2 room needs about 120 units of heat to reach a comfortable temperature, estimate reasonably if one radiator is sufficient for this purpose (you do not need to do decimal calculations, just provide a reasoned estimate; for example, you can say that $128/5$ is approximately $125/5 = 25$ because the difference between the numerators 128 and 125 is smaller than the denominator, or that $225/4$ is approximately 55 because $50 \times 4 = 200$, $60 \times 4 = 240$, and 225 is between 200 and 240)*).

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2025/26.

Elija **una sola opción**. Conteste el problema elegido **utilizando exclusivamente el anverso y reverso de esta hoja** (puede pedir hojas a sucio adicionales si las necesita). Puede dejar sus resultados expresados como fracciones o raíces, no se requiere usar números decimales. (*choose **only one option**. Answer the problem using the front and back of this sheet (you may ask for additional sheets if needed). You may leave your results expressed as fractions or roots, using decimal numbers is not required*).

2 Elija **solo una** de las dos opciones siguientes [2.5 pts] (*Choose **only one** of the following two options [2.5 pts]*):

- a) En un cierto instituto, el 45 % de los estudiantes de segundo de bachillerato son de ciencias y el 55 % restante, de letras. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 30 % de los alumnos de ciencias y el 40 % de los de letras. Si se elige un alumno al azar y resulta que tiene aprobadas todas las asignaturas, ¿cuál es la probabilidad de que sea de letras? (*In a certain high school, 45 % of the second-year baccalaureate students are science students and the remaining 55 % are humanities students. It is known that 30 % of the science students and 40 % of the humanities students pass all subjects. If a student is chosen at random and it turns out that they have passed all subjects, what is the probability that they are a humanities student?*)
- b) En un concurso, el premio se decide de la siguiente manera: se lanzan de forma independiente un dado y una moneda no trucados. Por cada punto obtenido con el dado se suman 100€ y si en la moneda sale cara, se suman otros 300€. Se pide: (*In a contest, the prize is decided as follows: a fair die and a fair coin are tossed independently. For each point obtained with the die, 100€ are added, and if the coin shows heads, another 300€ are added. You are asked to:*)
- 1) Calcular la probabilidad de ganar exactamente 400€ (*Calculate the probability of winning exactly 400€*).
 - 2) Calcular la probabilidad de ganar exactamente 400€ si sabemos que ha salido cara en la moneda (*Calculate the probability of winning exactly 400€ if we know that the coin showed heads*).
 - 3) Calcular la probabilidad de que haya salido cara en la moneda sabiendo que hemos ganado exactamente 400€ (*Calculate the probability that the coin showed heads knowing that we have won exactly 400€*).

Conteste un máximo de 5 cuestiones [0.5 pts cada una] (*Answer a maximum of 5 questions [0.5 pts each]*).

1 La matriz real (*The real matrix*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

cumple que (*satisfies that*):

- (A) Tiene inversa para cualquier valor de λ (*It has an inverse for any value of λ*);
- (B) Tiene inversa siempre que $\lambda \neq 0$ (*It has an inverse provided that $\lambda \neq 0$*);
- (C) Ninguna de las anteriores (*None of the above*)

2 La distancia d del punto $P(0, -2, -1)$ a la recta (*The distance d from point $P(0, -2, -1)$ to the line*)

$$r : \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

cumple que (*satisfies that*):

- (A) $0 < d < 1$;
- (B) $d > 2$;
- (C) Ninguna de las anteriores (*None of the above*)

3 Las rectas dadas por (*The lines given by*)

$$r : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \quad \text{y (and)} \quad s : \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

cumplen que (*satisfy that*):

- (A) Son paralelas (*They are parallel*);
- (B) Se cruzan (*They are skew / they cross without intersecting*);
- (C) Ninguna de las anteriores (*None of the above*)

4 Los vectores $\mathbf{u} = (3, -1, 5)$ y $\mathbf{v} = (-2, k, 3)$, cumplen que (*The vectors $\mathbf{u} = (3, -1, 5)$ and $\mathbf{v} = (-2, k, 3)$ satisfy that*):

- (A) Son paralelos para un cierto valor $k > 0$ (*They are parallel for a certain value $k > 0$*);
- (B) Son ortogonales para un cierto valor $k > 0$ (*They are orthogonal for a certain value $k > 0$*);
- (C) Ninguna de las anteriores (*None of the above*)

- 5 La derivada de la función $f(x) = \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ donde $\log$ denota el logaritmo natural o neperiano, cumple que
(The derivative of the function $f(x) = \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ where $\log$ denotes the natural or Napierian logarithm, satisfies that):
- (A) $f'(\pi/2) = -1$;
 - (B) $f'(\pi/2) = 2$;
 - (C) Ninguna de las anteriores (None of the above)
- 6 El valor del límite (The value of the limit) $L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ cumple que (satisfies that):
- (A) $0 < L < 1/2$;
 - (B) $L = 0$;
 - (C) Ninguna de las anteriores (None of the above)
- 7 La cantidad de números de 4 dígitos que se pueden formar con las cifras $1, 2, \dots, 9$, es igual a (The amount of 4-digit numbers that can be formed with the digits $1, 2, \dots, 9$, is equal to):
- (A) 2650;
 - (B) 3024;
 - (C) Ninguna de las anteriores (None of the above)
- 8 Con el alfabeto Morse se pueden formar palabras con rayas $-$ y puntos $\cdot$. El número de palabras formadas por 5 signos, 3 de los cuales son rayas y 2 son puntos, es igual a: (With the Morse alphabet, words can be formed with dashes $-$ and dots $\cdot$. The number of words formed by 5 signs, 3 of which are dashes and 2 are dots, is equal to:)
- (A) 1024;
 - (B) 10;
 - (C) Ninguna de las anteriores (None of the above)

Conteste todas las preguntas planteadas. Puede dejar sus resultados expresados como fracciones o raíces, no se requiere usar números decimales. Conteste al problema utilizando el anverso y reverso de esta hoja (puede pedir hojas adicionales si las necesita). (*Answer all the questions posed. You may leave your results expressed as fractions or roots, using decimal numbers is not required. Answer the problem using the front and back of this sheet (you may ask for additional sheets if needed)*).

[2.5 pts] Los problemas derivados de unos malos hábitos alimenticios son numerosos e incluyen, entre otros, diabetes y enfermedades cardíacas. Para prevenirlos, el comité de alimentos y nutrición del Instituto Americano de Medicina recomienda unos ciertos valores para los macronutrientes en una dieta saludable. Concretamente, para un individuo sano promedio, alrededor del 50 % del total de calorías ingeridas debería provenir de carbohidratos, un 20 % de grasas y un 30 % de proteínas. En el caso de un adulto con actividad física moderada y unos 75kg de peso, estos requisitos se traducen en unos 100g de carbohidratos, 40g de grasas y 60g de proteínas diariamente. Para elaborar una dieta, los alimentos se separan en 4 grupos fundamentales: A) leche y derivados, B) carne, C) frutas y verduras, D) pan y cereales. La composición nutricional promedio por porción de cada uno de estos grupos, es la siguiente: (*Problems derived from poor eating habits are numerous and include, among others, diabetes and heart diseases. To prevent them, the Food and Nutrition Board of the American Institute of Medicine recommends certain values for macronutrients in a healthy diet. Specifically, for an average healthy individual, around 50 % of the total calories ingested should come from carbohydrates, 20 % from fats, and 30 % from proteins. In the case of an adult with moderate physical activity and about 75kg of weight, these requirements translate into about 100g of carbohydrates, 40g of fats, and 60g of proteins daily. To prepare a diet, foods are separated into 4 fundamental groups: A) milk and dairy products, B) meat, C) fruits and vegetables, D) bread and cereals. The average nutritional composition per portion of each of these groups is as follows:*)

- Grupo A: 15g proteína, 20g carbohidratos, 5g grasa (*Group A: 15g protein, 20g carbohydrates, 5g fat*).
- Grupo B: 20g proteína, 10g carbohidratos, 15g grasa (*Group B: 20g protein, 10g carbohydrates, 15g fat*).
- Grupo C: 5g proteína, 25g carbohidratos, 10g grasa (*Group C: 5g protein, 25g carbohydrates, 10g fat*).
- Grupo D: 10g proteína, 30g carbohidratos, 5g grasa (*Group D: 10g protein, 30g carbohydrates, 5g fat*).

Se pide (*You are asked to*):

1. Para cada macronutriente (proteínas, carbohidratos y grasas) escribir una ecuación que exprese la cantidad diaria que debe consumirse como combinación lineal de porciones de alimentos de los 4 grupos (*For each macronutrient (proteins, carbohydrates, and fats) write an equation that expresses the daily amount that must be consumed as a linear combination of food portions from the 4 groups*).
2. Resolver el sistema de ecuaciones resultante. ¿Cómo debe interpretarse el resultado, hay alguna restricción sobre los valores que puede tomar la solución?. Razone su respuesta. (*Solve the resulting system of equations. How should the result be interpreted, is there any restriction on the values the solution can take?. Reason your answer.*)