MATEMÁTICAS CCSS

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA PCE UNEDASISS 2021

Parte 1. Bloque de 10 preguntas. Debe elegir 10 de las 12 propuestas. Cada acierto suma 0,5 puntos. Cada error resta 0,15 puntos. Solo hay una respuesta por cada cuestión.

1. Una matriz ***A*** es diagonal si se cumple que:
   a. Todos los elementos de la diagonal principal son iguales.
   b. Es cuadrada y los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1.
   c. Ninguna de las otras.

2. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. El resultado de hacer B x A es:
   a. No es posibles hacer B x A.
   b. La matriz Nula.
   c. Ninguna de las otras.

3. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, y sabiendo que el producto de A x B es C = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ¿cúal es el valor de x?
   a. x=2
   b. x = -2
   c. ninguna de las otras.

4. Dada la inecuación $-x + 3y - 3 \geq 1$. Un punto solución es:
   a. (0,1)
   b. (1,0)
   c. Ninguna de las otras.

5. ¿Cuál es el valor siguiente límite $\lim_{x \to 3^+} \frac{3}{x^2-9}$?
   a. $+\infty$.
   b. El límite no existe.
   c. Ninguna de las otras.

6. La función $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$ tiene
   a. Asíntota oblicua.
   b. Asíntota vertical.
   c. Asíntota oblicua y asíntota vertical.

7. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$
   a. Decreciente en el intervalo (0, + ∞).
   b. Creciente en el intervalo (0, + ∞).
   c. Ninguna de las otras.

8. Hallar $\int \left(e^{4x} - \frac{e^x}{4}\right) dx$
   a. $\frac{e^{4x}}{4} - e^x + C$
   b. $\frac{e^{4x}+e^x}{4} + C$
   c. Ninguna de las otras.

9. Si P es una probabilidad definida sobre el espacio muestral E={w_1, w_2, w_3, w_4} con P(w_1) = 0,15; P(w_2) = 4 P(w_4) y P(w_4) = 3 P(w_3), halla P(w_3) .

   a. P(w_3) = 0,05312
   b. P(w_3) = 0,6375
   c. Ninguna de las otras

10. Si A y B son dos sucesos a un espacio muestral E, con P(A|B) = $\frac{1}{2}$ P(B|A), entonces:
    a. Siempre que ocurre B, ocurre A.
    b. La probabilidad de B es el doble que la de A.
    c. Ninguna de las otras

11. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución normal N(μ=3, σ =0,8), y se sabe que P (X≥ a – 1) = 0,1056 podemos afirmar que:
    a. a = 1,5
    b. a = 5
    c. Ninguna de las otras.

12. El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por $IC = \left(X \pm Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, podemos afirmar que el error máximo admisible viene dado por:
    a. $E = Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
    b. $E = Z\alpha/_2 \sqrt{\frac{\sigma}{n}}$
    c. $E = Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

PARTE 2 – BLOQUE DE DESARROLLO. Debe responder a 2 de las 3 preguntas propuestas. Cada una de ellas sumará un máximo de 2,5 puntos.

1. Las ventas de un supermercado de refrescos y aperitivos durante junio, julio y agosto del año pasado están en la matriz A, y los precios de venta en euros están en la matriz B:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Junio & Julio & Agosto \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1500 & 2600 & 3650 \\ 750 & 800 & 900 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} Refrescos \\ Aperitivos \end{array};$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Refrescos & Aperitivos \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 3{,}0 \\ 1{,}0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} Junio \\ Julio \\ Agosto \end{array}$$

a) Multiplicar las matrices para obtener los ingresos por la venta de refrescos en los tres meses. ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información? ¿A cuánto ascienden los ingresos por la venta de aperitivos?

b) Multiplicar las matrices para obtener los ingresos de ventas totales por meses. ¿en qué mes se alcanzó el máximo de ingresos? ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información?

c) ¿Cuántos fueron los ingresos totales en los 3 meses?

<u>Resolución:</u>

a) Para obtener los ingresos por la venta de refrescos en los tres meses debemos hacer la multiplicación de A por B.

$$A * B = \begin{pmatrix} 1500 & 2600 & 3650 \\ 750 & 800 & 900 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 3{,}0 \\ 1{,}0 & 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10550 & 22175 \\ 3600 & 7275 \end{pmatrix}$$

Esta información respecto los ingresos por la venta de refrescos nos viene dada por el elemento a_{11} , es decir, el elemento correspondiente a la primera fila y la primera columna de la matriz resultante. Los ingresos totales ascienden a 10550€.

En cuanto a los ingresos por la venta de aperitivos estos vienen dados por el elemento a_{22} y ascienden a 7275€.

b) En este caso para obtener los ingresos de ventas totales por meses debemos multiplicar la matriz B por la matriz A, de manera que en la diagonal principal de la matriz resultante nos quedarán, respectivamente, los ingresos de las ventas totales de junio, julio y agosto.

$$B * A = \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 3{,}0 \\ 1{,}0 & 2{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1500 & 2600 & 3650 \\ 750 & 800 & 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5625 & 8000 & 10450 \\ 4500 & 6300 & 8175 \\ 3375 & 4600 & 5900 \end{pmatrix}$$

El máximo ingreso se alcanzo en el mes de julio, con un valor de 6300€. Esta información viene dada por el elemento a_{22}, correspondiente al segundo elemento de la diagonal principal.

c) Los ingresos totales en los tres meses los podemos obtener sumando los elementos de la diagonal principal de cualquiera de las dos matrices obtenidas en los apartados anteriores, pues el resultado será el mismo.

$$Ingresos\ totales = 5625 + 6300 + 5900 = 17825€$$

2. Encontrar la función cuya segunda derivada es ***-12x***, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto (-2,0).

<u>Resolución:</u>

Integraremos la función en dos pasos de manera que podremos ir aplicando las condiciones del mínimo que presenta la función.

$$\int -12x\, dx = -6x^2 + C$$

Sabiendo que la derivada de esta función es $-6x^2 + C$ y que la función presenta un mínimo en x=-2 significa que la derivada de la función en ese punto va a ser 0, pues es una característica de los extremos relativos de una función. Entonces:

$$f'(-2) = 0$$

$$-6 * (-2)^2 + C = 0$$

$$C = 24$$

Ahora podemos integrar la derivada para encontrar la función primitiva:

$$\int (-6x^2 + 24)\, dx = -2x^3 + 24x + K$$

Ahora, sabiendo que la función pasa por el punto (-2,0), significa que cuando la x=-2 el valor de y, es decir, la imagen de la función, valdrá 0. Por lo tanto:

$$f(x) = -2x^3 + 24x + K$$

$$f(-2) = 0$$

$$-2 * (-2)^3 + 24 * (-2) + K = 0$$

$$K = 32$$

Entonces la función cuya segunda derivada es -12x y que presenta un mínimo en el punto (-2,0) es la función

$$f(x) = -2x^3 + 24x + 32$$

3. Se dispone de un dado tetraédrico trucado con cuatro caras con puntuaciones: 1, 2, 3, 4, de modo que ***P(4) = 4P(1), P(3) = 3P(1), P(2) = 2P(1),*** en donde **P(4)** indica la probabilidad de obtener la puntuación 4 y así sucesivamente.

   Se dispone también de dos urnas con las siguientes composiciones:
   U_1: 1 bola roja y 2 bolas verdes;
   U_2: 2 bolas rojas y 3 bolas verdes.
   Se lanza el dado. Si sale número par extraemos una bola de la urna ***U_1***. Si sale impar extraemos una bola de la urna ***U_2***. Se pide:
   a) Determinar las probabilidades de los sucesos elementales que se presentan al lanzar el dado de cuatro caras.
   b) Se lanza el dado y a continuación extraemos una bola de la urna que corresponda. Halla la probabilidad de que sea de color verde.

<u>Resolución:</u>

a) Nos piden que hallemos las probabilidades de los sucesos elementales que se presentan al lanzar el dado de cuatro caras, es decir, nos están pidiendo que hallemos P(1), P(2), P(3) y P(4).
   Sabiendo que el espacio muestral del dado es $\{1,2,3,4\}$, según la Axiomática de Kolmogorov la P(E)=1, por lo tanto:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = P(E) = 1$$

   Aplicando las igualdades del enunciado:

$$P(1) + 2P(1) + 3P(1) + 4P(1) = 1$$

$$10P(1) = 1$$

$$P(1) = \frac{1}{10}$$

   Solución:

$$P(1) = \frac{1}{10} \quad ; \quad P(2) = 2P(1) = \frac{2}{10} \quad ; \quad P(3) = 3P(1) = \frac{3}{10} \quad ; \quad P(4) = 4P(1) = \frac{4}{10}$$

b) Sean los siguientes sucesos:
   V= ”extraer una bola verde”
   U_1= ”extraer bola de la urna 1”
   U_2= ”extraer bola de la urna 2”

   Según el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de extraer una bola verde será la probabilidad de extraer una bola verde de la urna 1 más la probabilidad de extraer una bola verde de la urna 2.

$$P(V) = P(U_1) * P(V/U_1) + P(U_2) * P(V/U_2)$$

Entonces, teniendo en cuenta que la sacaremos una bola de la urna 1 si nos sale un número par, será la probabilidad de sacar un 2 más la probabilidad de sacar un 4 al tirar el dado. Para la urna 2 será con el 1 y el 3.

$$P(U_1) = P(2) + P(4) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P(U_2) = P(1) + P(3) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

Ahora, sabiendo las bolas totales en cada urna y cuántas son verdes podemos aplicar la Regla de Laplace:

$$P(V/U_1) = \frac{bolas\ verdes\ en\ la\ urna\ 1}{bolas\ totales\ en\ la\ urna\ 1} = \frac{2}{3}$$

$$P(V/U_2) = \frac{bolas\ verdes\ en\ la\ urna\ 2}{bolas\ totales\ en\ la\ urna\ 2} = \frac{3}{5}$$

Finalmente:

$$P(V) = \frac{6}{10} * \frac{2}{3} + \frac{4}{10} * \frac{3}{5} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$