MATEMÁTICAS II

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA PCE UNEDASISS 2021

Parte 1. Bloque de 10 preguntas. Debe elegir 10 de las 15 propuestas. Cada acierto suma 0,5 puntos. Cada error resta 0,25 puntos. Solo hay una respuesta por cada cuestión.

PREGUNTAS TIPO TEST

1. Sea el polinomio p(x) = $\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (determinante). Entonces
   a. p(a) = 0 para algún valor a > 0.
   b. El grado de p(x) es menor que 4.
   c. Ninguna de las otras dos.

2. Sea la matriz $B = A^4$ donde A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b_{3,1}$ el número de la tercera fila y primera columna de B. Entonces
   a. $b_{3,1}$ es un número par.
   b. $b_{3,1} > 10$.
   c. Ninguna de las otras dos.

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 3 \end{cases}$. Entonces la solución cumple:
   a. x < z.
   b. y > x + z.
   c. Ninguna de las otras dos.

4. Sea el rombo *ABCD* de vértices *A* = (3,2,1), *B* = (4,5,2), *C* = (3,8,3) y *D* (a,b,c). Entonces
   a. a > c.
   b. b > c.
   c. Ninguna de las otras dos.

5. Sea *s* la recta que pasa por los puntos *A* = (0,1,1) y B = (1,0,2) y *d* la distancia del punto *Q* = (0,3,0) a la recta *s*. Entonces
   a. d < 1.
   b. d > 2.
   c. Ninguna de las otras dos.

6. Sea el plano π determinado por los puntos *A* = (0,1,1), *B* (1,0,2) y *C* = (1,3,1). Entonces
   a. el plano 2x + y + z – 2 = 0 es perpendicular a π.
   b. el plano 3x + y + 7z – 10 = es perpendicular a π.
   c. Ninguna de las otras dos.

7. Sea la recta *r* determinada *A* = (0,1,1) y *B* = (1,0,2), y la recta *s* determinada por los puntos *C* = (1,0,1) y *D* = (1,-2,0). Entonces
   a. *r* y *s* se cruzan.
   b. *r* y *s* se cortan en un punto.
   c. Ninguna de las otras dos.

8. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt[3]{x^6+3}}$ (raíz cúbica). Entonces
   a. La recta y – 2 = 0 es una recta asíntota de la gráfica de *f*.
   b. La recta 2y + 1 = 0 es una recta asíntota de la gráfica de *f*.
   c. Ninguna de las otras dos.

9. Sea la función $f(x)=\cos\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$. Entonces
   a. $f'(0) = 0$ y $f''(0) < 0$.
   b. $f'(0) > 0$ y $f''(0) < 1$.
   c. Ninguna de las otras dos.

10. Sea $k=\int_0^1 \dfrac{x-1}{x^2+1}dx$. Entonces
   a. k > ln2. (logaritmo neperiano)
   b. k < $\dfrac{1}{2}\ln 2$.
   c. Ninguna de las otras dos.

11. Sea la función $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}$, *D* su dominio o campo de existencia y $k=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Entonces
   a. k = 1
   b. $D=(-\infty,-1]U[1,\infty)$.
   c. Ninguna de las otras dos.

12. De una urna con 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 4 bolas rojas, se extraen dos bolas una tras otra sin introducir la primera. Sea *p* la probabilidad de extraer dos bolas blancas, *q* la probabilidad de extraer dos bolas negras y *r* la probabilidad de extraer dos bolas rojas. Entonces
    a. $q = \frac{3}{38}$ $y\ r = \frac{3}{95}$.
    b. $\mathrm{p} = \frac{28}{153}$ $y\ r = \frac{5}{51}$.
    c. Ninguna de las otras dos.

13. Se considera que la probabilidad de que al nacer un perro, este sea macho, es 0,40. Sea *p* la probabilidad de que haya al menos un macho entre los 5 cachorros de una camada. Entonces
    a. $p < 0,8$.
    b. $p > 0,9$.
    c. Ninguna de las otras dos.

14. De una baraja de 40 cartas se saca una carta y se deja descubierta, y se sacan otras dos tapadas. Sea *p* la probabilidad de que se tenga un trío (tres cartas de igual numeración o tres figuras), sabiendo que en la primera carta que se obtuvo es un caballo. Entonces
    a. $p < \frac{1}{250}$.
    b. $p > \frac{1}{200}$.
    c. Ninguna de las otras dos.

15. Se sabe que la probabilidad de que una semilla de sandía germine es 0,4. Se plantan 10 semillas de sandía. Sea *p* la probabilidad de que germinen sólo 6 de las 10 semillas plantadas. Entonces
    a. $p < 0,1$.
    b. $p > 0,3$.
    c. Ninguna de las otras dos.

PARTE 2 – BLOQUE DE DESARROLLO. Elija una de las dos opciones. Constará de 2 preguntas, no siendo obligatorio contestar a las dos. La calificación máxima de este bloque es de 5 puntos; 2,5 por la primera y 2,5 por la segunda.

Opción 1.

1. Sea la matriz $C = A^2 - 4A - 6B$ donde $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudie el rango de C es función del valor del número real *a*.

__Resolución:__

Debemos encontrar C. Primero vamos a calcular A^2.

$$A^2 = A * A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$C = A^2 - 4A - 6B = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \end{pmatrix}$$

A simple vista podemos observar que la fila uno y la fila 3 de la matriz son idénticas, por lo que independientemente del valor de *a*, el rango de la matriz C no será 3 en ningún caso.

Ahora, vamos a ver cuando la matriz C tendrá rango 2 y cuando será 1.

$$C = \begin{pmatrix} 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ver a simple vista que si $2a^2 - 4a - 6 \neq 0$ el rango de C será 2, pues la matriz está escalonada y la fila 1 y la fila 2 son independientes.

En el caso contrario que $2a^2 - 4a - 6 = 0$, vemos que la fila 1 nos queda una fila nula, es decir, una fila de ceros, por lo que el rango de C será 1 (teniendo en cuenta que la fila 2 no depende del valor *a* y es una fila no nula.

Vamos a encontrar entonces para qué valores de *a* se cumple que $2a^2 - 4a - 6 = 0$:

Lo resolvemos como una ecuación de segundo grado:

$$a = \frac{-(-4) \mp \sqrt{(-4)^2 - 4 * (-6) * 2}}{2 * 2}$$

Soluciones:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = -1$$

Entonces con el razonamiento antes efectuado, podemos afirmar qué:

R=

- Si $a = 3 \; o \; a = -1 \;\rightarrow Rg(C) = 1$
- Si $a \neq 3 \; y \; a \neq -1 \rightarrow \; Rg(C) = 2$

2. Sean la recta *r* determinada por los planos x – 2y – 2z – 1 = 0 y x + 5y – z = 0, y el plano π definido por 2x + y + mz = n, donde *m* y *n* son números reales. Estudie los valores que deben tener *m* y *n* para que la recta y el plano sean:

a) Secantes b) Paralelos

Resolución:

Para estudiar la posición de una recta (dada de forma implícita) y un plano, podemos estudiar los rangos de las matrices. Sea M la matriz formada por los vectores normales de los 3 planos, y M' la matriz ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \;\; ; \;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & m & -n \end{pmatrix}$$

a) Para que la recta y el plano sean secantes deben tener un punto en común, que será el punto de corte. Eso va a suceder cuando Rg(M)=Rg(M')=3.
Entonces estudiamos el rango de M en función de m:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 5m + 4 - 2 - (-20 - 2m - 1) = 7m + 23$$

$$7m + 23 = 0 \rightarrow m = -\frac{23}{7}$$

Para que el Rg(M)=3 el determinante de M debe ser distinto a 0, entonces $m \neq -\frac{23}{7}$.
Como el rango de la matriz ampliada M' no puede ser menor que el rango de M y tampoco puede ser igual a 4(pues solo tiene 3 filas), entonces Rg(M')=3.

R= la recta r y el plano π serán secantes siempre que $m \neq -\frac{23}{7}$, y n puede tomar cualquier valor.

b) En este caso para que la recta y el plano sean paralelos tiene que suceder que Rg(M)=2 y Rg(M')=3, de manera que el sistema no tendrá solución.
Comprobamos que si $m = -\frac{23}{7}$ el Rg(M)=2:

$$Submatriz\ 2x2\ de\ M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rg(M) = 2\ si\ m = -\frac{23}{7}$$

Ahora debemos ver para que valores de n el Rg(M')=3

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{23}{7} & -n \end{pmatrix}$$

Podemos usar el método de Gauss para conseguir la matriz triangular:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{23}{7} & -n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & \frac{5}{7} & -n+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7n+9 \end{pmatrix}$$

Pasos realizados:

$$1ro: F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3\ \ y\ \ F_2 - F_1 \rightarrow F_2$$
$$2ndo: 7F_3 - 5F_2 \rightarrow F_3$$

Vemos ahora que si -7n+9≠0 el Rg(M')=3.

$$-7n + 9 = 0 \rightarrow n = \frac{9}{7}$$

R= para que la recta r y el plano π sean paralelos: $m = -\frac{23}{7}\ y\ n = \frac{9}{7}$

Opción 2.

1. Estudie y represente la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Resolución:

Primero estudiamos el dominio de la función, del que excluiremos los valores de x que nos anulan el denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -2 \quad y \quad x_2 = 2$$

Entonces:

$$Dom\ f(x) = \Re - \{-2,2\}$$

Podemos buscar también los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ OX \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = \frac{x}{x^2 - 4} \rightarrow x = 0 \rightarrow P(0,0)$$
$$Eje\ OY \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0}{0^2 - 4} = 0 \rightarrow P(0,0)$$

Estudiamos ahora las posibles asíntotas de la función:

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0\ (grado\ denominador > grado\ numerador)$$

La función presenta una asíntota horizontal y=0.
No existirán asíntotas oblicuas al haber una asíntota horizontal.

- Asíntota vertical: aparecerán en los valores de x que nos anulan el denominador de la función, es decir, en los puntos que no pertenecen al dominio. Entonces:

  x=2:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{+0} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{-0} = -\infty$$

  x=-2

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{2}{-0} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{2}{+0} = +\infty$$

Habrá una asíntota vertical en x=2 y otra en x=-2.

Estudiamos ahora los intervalos de crecimiento y los extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{1*(x^2-4)-2x*x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

Igualamos a 0 la derivada para encontrar los posibles extremos relativos, que serán los puntos donde va a cambiar la monotonía:

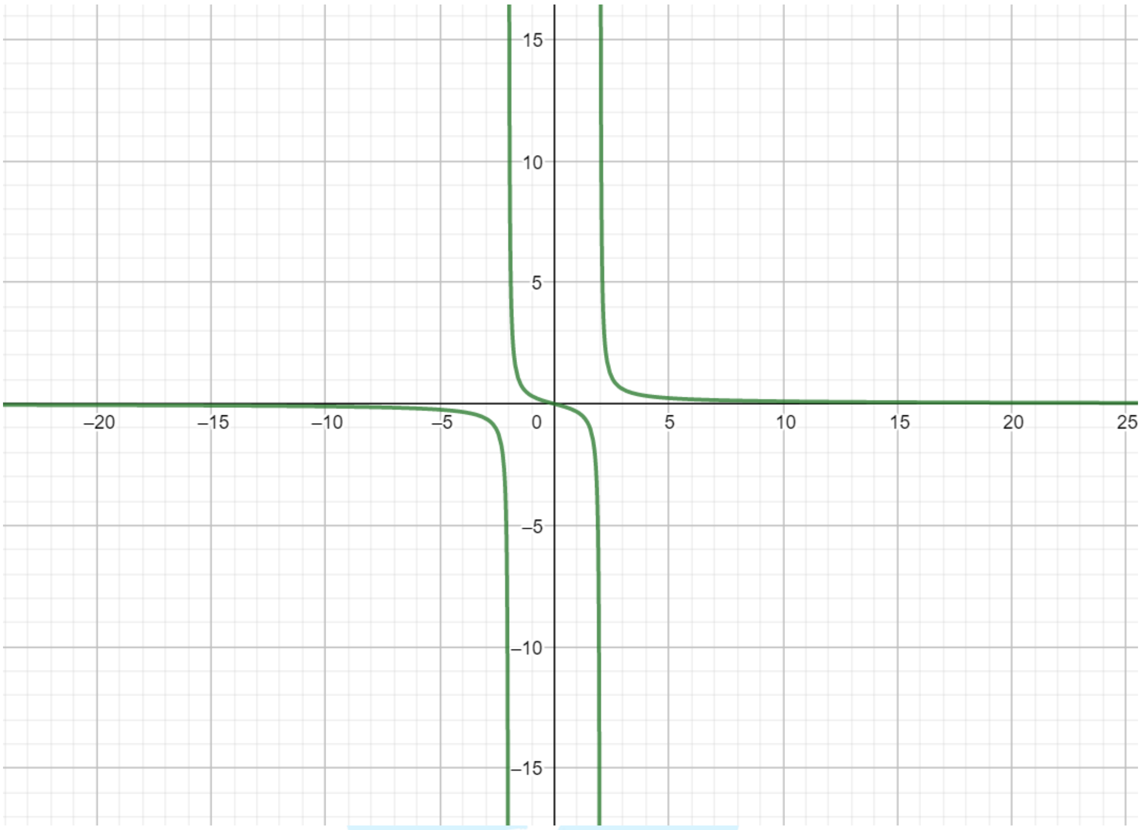
$$f'(x) = 0 \to \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0 \to -x^2-4 = 0 \to x^2 = -4 \to \sin solución$$

Nos queda una raíz cuadrada negativa por lo que no tiene solución real. Entonces podemos afirmar que no habrá máximos ni mínimos, y debido a que la derivada será siempre negativa, la función va a decrecer en todo su dominio.

$$f(1) = -\frac{1^2+4}{(1^2-4)^2} = -\frac{5}{9} < 0 \to función\ decrece\ en\ todo\ su\ dominio$$

Sabiendo esto, se puede realizar una gráfica bastante aproximada de la función (podríamos buscar los puntos de inflexión, pero no es totalmente necesario).

Gráfica de la función:



2. Se elige un número al azar entre 0 y 9999 (ambos incluidos). ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor que 4444 y múltiplo de 5?

Resolución:

Para resolver este problema debemos tener en cuenta que la probabilidad qué buscamos es la intersección entre la probabilidad de obtener un número mayor que 4444 y la probabilidad de que sea un múltiplo de 5, por lo tanto:

$$P(\text{"mayor que 4444"} \cap \text{"múltiplo de 5"}) = P(\text{"mayor que 4444"}) * P(\text{"múltiplo de 5"})$$

Para encontrar la probabilidad de que el número elegido sea mayor que 4444 podemos usar la regla de Laplace, teniendo en cuenta que entre el 0 y el 9999 hay 10000 números, y que entre el 4444 y el 9999 hay 5555 números, por lo tanto:

$$P(\text{"mayor que 4444"}) = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ favorables}{n^{\underline{o}}\ casos\ totales} = \frac{5555}{10000}$$

Ahora para encontrar la probabilidad que sea un múltiplo de 5, podemos tener en cuenta que para cada 10 números encontramos 2 múltiplos de 5, de esta manera:

$$P(\text{"múltiplo de 5"}) = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ favorables}{n^{\underline{o}}\ casos\ totales} = \frac{2}{10}$$

Finalmente:

$$P(\text{"mayor que 4444"} \cap \text{"múltiplo de 5"}) = \frac{5555}{10000} * \frac{2}{10} = \frac{1111}{10000}$$