

MATEMÁTICAS CCSS. UNED – LOE.

Tema	Pág.
1. Matrices y Determinantes.	
1.1. Definiciones	3
1.2. Operaciones Básicas	6
1.3 Determinantes	8
1.4 Producto de Matrices	10
1.5. Matriz Inversa	13
1.6. Rango de una matriz	15
2. Sistemas de Ecuaciones Lineales	
2.0. Sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas	19
2.1. Definiciones	22
2.2. Notación Matricial	23
2.3. Método de Gauss	24
2.4. Teorema de Roche – Frobenius	28
2.5. Método de Cramer	28
2.6. Sistemas con Parámetros	30
2-7- Problemas de la vida real.	32
3. Introducción a la programación Lineal	
3.1. Dibujo de rectas	39
3.2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas.	41
3.3. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.	42
3.4. Problemas de Optimización-	43
3.5. Problemas de la vida real.	45
4. Geometría Analítica del Espacio.	
4.1. Puntos y Vectores	52
4.2. Operaciones con puntos y vectores	54
4.3. Ecuación de la Recta	59
4.4. Ecuación del Plano	63
4.5. Posición Relativa	65
4.6. Ángulos	69
4.7 Distancias	70
5. Funciones.	
5.1. Conjuntos numéricos	73
5.2 Números Reales	76
5.3 Polinomios	77
5.4 Funciones Introducción	91
5.5. Funciones Básicas	94
5.6. Límites y Derivadas	111
5.7. Estudio General de funciones. Gráficas	119
6. Integración.	
6.1. Integral Indefinida	120
6.2. Integral Definida. Aplicaciones	126
EXÁMENES DE UNED	139



1. Matrices y Determinantes.

1.1 Definiciones.

Definición:

Sean m, n números enteros positivos. Llamo matriz de m filas y n columnas a un conjunto de $m \times n$ números dispuestos así:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Fila1} \rightarrow & & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \\
 \text{Fila2} \rightarrow & & \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \\
 & & \vdots \\
 \text{Fila}m \rightarrow & & \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & \text{columna1} & \text{columna2} & \text{columna}n
 \end{array}$$

Observaciones:

- (1) El elemento a_{ij} es el que ocupa la intersección de la fila i con la columna j .
- (2) Al conjunto de todas las matrices con m filas y n columnas lo representamos por M_{mn} .
- (3) Llamo diagonal principal a la formada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definiciones:

Sea $A \in M_{mn}$ (o sea A es una matriz con m filas y n columnas).

Diremos que:

A es cuadrada $\Leftrightarrow m = n$ (tiene el mismo número de filas que de columnas).

A triangular superior $\Leftrightarrow [\forall i, j \quad i > j \Rightarrow a_{ij} = 0]$
(todos los elementos que están "por debajo" de la diagonal principal son 0)

A triangular inferior $\Leftrightarrow [\forall i, j \quad i < j \Rightarrow a_{ij} = 0]$
(todos los elementos que están "por encima" de la diagonal principal son 0)

A diagonal $\Leftrightarrow [\forall i, j \quad i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0]$
(todos los elementos que "no" están en la diagonal son 0)

A matriz fila ó vector-fila $\Leftrightarrow m = 1$ (A solo tiene una fila)

A matriz columna ó vector-columna $\Leftrightarrow n = 1$ (A solo tiene una columna)

A matriz nula $\Leftrightarrow [\forall i, j \quad a_{ij} = 0]$ (todos los elementos son cero)

I_n matriz identidad $\Leftrightarrow [I_n \text{ cuadrada, } I \text{ diagonal y los elementos de la diagonal son todos } 1]$

Observaciones:

(1) Para cada m y n hay una matriz nula:

$$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

(2) Para cada n hay una matriz Identidad

$$(1) \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \dots$$

Ejemplos:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es cuadrada 3 x 3 y triangular superior.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es 4 x 5 triangular inferior

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matriz diagonal $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ matriz columna

$(-1 \ 2 \ 4 \ -3)$ matriz fila.

1.2. Operaciones Básicas

OPERACIONES ELEMENTALES

SUMA DE MATRICES

Definición: Sean $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{p,q}$. Para poder efectuar la suma $A + B$ es necesario $m = p$ y $n = q$, o sea,

número de filas de A = número de filas de B ;

número de columnas de A = número de columnas de B .

En tal caso, la suma $C = A + B$ es también una matriz con el mismo número de filas: m y el mismo número de columnas: n ; y se cumple:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

O sea, cada elemento de C es la suma de los correspondientes elementos de A y B .

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+3 & 0+(-2) \\ 7+5 & 4+(-4) & -3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sean $A, B, C \in M_{m,n}$ (matrices con el mismo tamaño)

(1) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

(2) Conmutativa: $A + B = B + A$

(3) Elemento neutro: $A + O_n = A$, O_n = matriz nula.

(4) Elemento simétrico: $A + (-A) = O_n$

PRODUCTO POR UN NÚMERO

Definición: $A \in M_{m,n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces el producto $\alpha \cdot A$ es una matriz que calculamos así:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

o sea, multiplico todos los elementos de A por α

Ejemplo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & -12 \\ -6 & 0 & 18 \\ -9 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sean $A, B \in M_{m,n}$ (dos matrices con el mismo tamaño), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- (1) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- (2) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- (3) $\alpha \cdot (B \cdot A) = (\alpha \cdot B) \cdot A$
- (4) $1 \cdot A = A$

Observaciones:

Por tener las propiedades 1,2,3,4 de la página anterior y éstas, decimos que el conjunto $M_{m,n}$ con la suma y el producto por un número es un R-espacio vectorial.

En la práctica, esto nos sirve para poder efectuar cualquier fórmula con matrices, donde sólo aparezcan estas operaciones, sin preocuparnos por el orden en que hacemos dichas operaciones.

1.3 Determinantes.

3 DETERMINANTES

Definición: Sea $A \in M_n$ (una matriz cuadrada $n \times n$). El **determinante** de A es un número que asociamos a A y que lo calculamos siguiendo unas reglas que dependen del tamaño de A .

Cálculo de determinantes:

Orden 1: $A = (a) \rightarrow \det A = a$

Orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Orden 3: (Regla de Sarrus)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

Observaciones:

También podemos hacerlo copiando debajo de la tercera fila las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + idb)$$

Ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -5 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = [1 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-4) \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot (-5) \cdot 6] - [-2 \cdot (-3) \cdot 7 + (-4) \cdot (-5) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 6] = -131$$

Nota: Aunque en este curso no necesitamos calcular determinantes de tamaño superior a 3, veamos el método de los Adjuntos. Estos adjuntos los utilizaremos más adelante para calcular la inversa de una matriz.

Método de los Adjuntos. Válido para cualquier tamaño.

Definición:

Sea A una matriz cuadrada llamo **Menor Complementario** del elemento a_{ij} , y lo represento por M_{ij} , al determinante de la matriz que resulta al tachar la fila i y la columna j , o sea tachar la fila y la columna donde está dicho elemento.

Definición:

En la situación anterior, llamo **Adjunto** del elemento a_{ij} , y lo represento por A_{ij} a:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Observaciones:

El valor de $(-1)^{i+j}$ es: 1 si $i + j$ es par; -1 si $i + j$ es impar.

Por lo tanto, el adjunto de un elemento es igual al menor complementario ó al menor complementario cambiando de signo.

Por ejemplo, en una matriz 4×4 el valor del signo de $(-1)^{i+j}$ es:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Método de los adjuntos:

$A \in M_n$ entonces:

$$\text{Para toda fila } i: \det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

$$\text{Para toda columna } j: \det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}$$

O sea, puedo elegir la fila (o columna) que quiera, y el determinante de A es la suma de cada uno de los elementos de

dicha fila (o columna) multiplicado por su adjunto.
En tal situación decimos que Desarrollamos por la fila i (o por la columna j).

Ejemplo:

Veamos el ejemplo anterior, resuelto por este método.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -5 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = (\text{desarrollando por la primera fila}) =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (3 - 24) + 4 \cdot (5 - 28) + 2 \cdot (-30 + 21) =$$

$$= 1 \cdot (-21) + 4 \cdot (-23) + 2 \cdot (-9) = -131$$

1.4. Producto de matrices.

Como paso previo vemos como se multiplica una Fila por una Columna.

Producto fila-columna

Sea F una matriz-fila con n columnas: $F = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$

Sea C una matriz-columna con n filas:

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

entonces el producto $F \cdot C$ es una matriz con una fila y una columna que calculamos así:

$$F \cdot C = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1})$$

Ejemplo:

$$(1 \ 3 \ 4 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = (1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5) = (-12)$$

Producto de matrices

Sea $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{p,q}$. Para poder efectuar el producto $A \cdot B$ es necesario: $n = p$ (número de columnas de A = número de filas de B).

En tal situación, el resultado del producto: $C = A \cdot B$ es una matriz $m \times q$ (C tiene el mismo número de filas de A y el mismo número de columnas que B), y lo calculamos así:

$$\begin{pmatrix} \text{Fila1} \\ \text{Fila2} \\ \vdots \\ \text{Filam} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & c & \dots & c \\ o & o & \dots & o \\ l & l & \dots & l \\ u & u & \dots & u \\ m & m & \dots & m \\ n & n & \dots & n \\ a & a & \dots & a \\ 1 & 2 & \dots & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot C_1 & F_1 \cdot C_2 & \dots & F_1 \cdot C_q \\ F_2 \cdot C_1 & F_2 \cdot C_2 & \dots & F_2 \cdot C_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_m \cdot C_1 & F_m \cdot C_2 & \dots & F_m \cdot C_q \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad \qquad B$

O sea, para calcular el elemento C_{ij} del producto, multiplico la fila i de A por la columna j de B según la definición de producto fila-columna anterior.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 17 & -21 & -22 \\ 10 & -17 & 49 & 40 \\ -7 & -31 & 35 & 38 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \qquad \qquad 2 \times 4 \qquad \qquad 3 \times 4$

Propiedades del producto.

A diferencia de la suma y el producto por un número, esta operación no tiene las mismas propiedades que las operaciones con números. Esto nos dice que, a partir de ahora, cada vez que manipulemos expresiones con matrices, tenemos que fijarnos en qué y cómo se puede hacer.

1. Asociativa: $A \in M_{m,n}$ $B \in M_{n,p}$ $C \in M_{p,q}$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

2. No conmutativa: En general $A \cdot B \neq B \cdot A$

De hecho, el que podamos efectuar $A \cdot B$ no garantiza que podamos hacer $B \cdot A$ (En el ejemplo anterior no puedo hacer $B \cdot A$)
Incluso cuando los dos productos son posibles, no tiene por que dar el mismo resultado.

EJEMPLOS

a) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

Entonces: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 44 & -14 \end{pmatrix}$

Y sin embargo: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 2 & -27 \end{pmatrix}$

b) En ocasiones las matrices sí conmutan:

Si $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

Entonces: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ -36 & -22 \end{pmatrix}$

Y $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ -36 & -22 \end{pmatrix}$

3. Elemento neutro

Para toda matriz $A \cdot I_n = A$ y $I_m \cdot A = A$, donde I_n e I_m son las matrices identidad del tamaño adecuado para que se pueda multiplicar.

EJEMPLO

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

Entonces: $A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

Y también: $I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

1.5 Matriz Inversa.

4. Matriz inversa

Si A es una matriz cuadrada y $\det A \neq 0$ entonces existe una matriz A^{-1} , que llamamos matriz inversa de A , que cumple la propiedad:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \quad (I_n = \text{matriz identidad})$$

Cálculo de A^{-1}

1º Hallamos el $\det A$. (Si $\det A = 0$ entonces A no tiene inversa)

2º Calculamos A' ; la matriz traspuesta de A (cambiar filas por columnas).

3º Hallamos A^* ; una matriz cuyos elementos son los adjuntos de A' .

$$4^\circ \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Ejemplos:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \det A = ad - bc \quad (\text{suponemos } ad - bc \neq 0)$$

$$(2) \quad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(1) \det A = (-16 + 0 + (-12)) - (60 + 0 + (-2)) = -28 - 58 = -86 \neq 0$$

$$(2) \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 6 & -12 \\ -13 & -19 & -5 \\ -24 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad A^{-1} = \frac{1}{-86} \begin{pmatrix} -14 & 6 & -12 \\ -13 & -19 & -5 \\ -24 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Observaciones:

(1) Por no cumplirse la propiedad conmutativa hemos de tener cuidado al despejar una matriz.

Si queremos despejar la matriz B en la ecuación $AB = C$ queda $B = A^{-1}C$, si lo hacemos en la ecuación $BA = C$, queda $B = CA^{-1}$.

$$(2) \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$(3) \quad \det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

(4) Si A es una matriz cuadrada de orden n y λ es un número, entonces:

$$\det (\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$$

1.6 Rango de una matriz.

5 Rango de una matriz

Definición:

Sea $A \in M_{m \times n}$. Llamo **submatriz cuadrada** de A , a toda matriz cuadrada que podemos formar tomando elementos de A y manteniendo la estructura de filas y columnas:

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

submatrices de orden 1: $(1) \quad (2) \quad (3) \dots$

submatrices de orden 2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \dots$

(la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ no es una submatriz de A , pues el 3 y el 8 están en la misma columna y en A no lo están)

submatrices de orden 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Definición:

Sea $A \in M_{m \times n}$. El **rango** de A es un número entero K , tal que existe una submatriz de A de orden K , A_K , tal que $\det A_K \neq 0$, y toda submatriz de orden mayor que K tiene determinante cero.

Cálculo de rangos:

Método de los menores:

1º Buscar una submatriz A_1 de A que tenga determinante distinto de cero. (Si no hay ninguna, entonces A es una matriz nula y su rango es 0).

2º Buscar una submatriz A_2 de A que tenga determinante distinto de cero y que contenga A_1 .

Si no hay ninguna entonces el rango $A = 1$

3º Buscar una submatriz A_3 de A que tenga determinante distinto de cero y que contenga A_2 .

Si no hay ninguna, entonces el rango $A = 2$.

Etc...

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = (1), \det A_1 = 1 \neq 0$$

$$\text{Pruebo } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A_2 = 4 - 4 = 0, \text{ éstanosirve.}$$

$$\text{Pruebo } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \det A_2 = 5 - 6 = -1 \neq 0, \text{ éstasí.}$$

$$\text{Pruebo } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \det A_3 = (-8 - 10 - 12) - (-12 - 8 - 10) = 0, \text{ nosirve.}$$

$$\text{Pruebo } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \det A_3 = (-10 - 18 - 16) - (-20 - 12 - 12) = 0, \text{ nosirve}$$

Como no hay ninguna otra submatriz de orden 3 que contenga a $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, el rango es 2.

EJERCICIOS.

1. Calcular:

- a) $A + 2B$
- b) $A \cdot C$
- c) $D \cdot A$
- d) $D \cdot B$
- e) $B \cdot C - 3D$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

4.

Dada la matriz $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcular:

- a) A^2
- b) A^{-1}
- c) $5 \cdot A^t$
- d) $\text{rango}(A)$

5. Hallar el rango de las matrices siguientes.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución de los ejercicios

1.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 8 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 11 & 8 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 7 \\ 4 & -13 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -8 \\ -1 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

2.

a) 0 b) 51 c) -8

3.

a)

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{11}{9} & 1 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{8}{9} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix}$$

4.

a)

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

d) Rango (A) = 3

5.

a) Rango = 2

b) Rango = 2

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Un sistema de ecuaciones consiste en un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas. El sistema se llama lineal si la potencia de todas las incógnitas es uno.

2.0. Sistemas de 2 ecuaciones y 2 incógnitas. Métodos clásicos.

Método de Sustitución.

Se trata de despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir el resultado de este despeje en la otra ecuación.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 5x-2y=13 \\ x+3y=6 \end{cases}$$

Despejamos x de la segunda ecuación y sustituimos en la primera:

$$x=6-3y ; 5(6-3y)-2y=13$$

De esta forma se consigue una ecuación de una sola incógnita.

$$30-15y-2y=13$$

$$-15y-2y=13-30 ; -17y=-17 ; 17y=17 ; y=1$$

Y sustituyendo el resultado de y en la ecuación que tiene la x despejada:

$$x=6-3y=6-3 \cdot 1=3$$

Método de Igualación.

Consiste en despejar una incógnita de una ecuación y despejar la misma incógnita de la otra ecuación e igualar.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x+2y=-3 \end{cases}$$

Despejamos x de ambas ecuaciones e igualamos:

$$x=\frac{5+3y}{2} ; \frac{5+3y}{2}=\frac{-3-2y}{5}$$

$$5(5+3y)=2(-3-2y)$$

$$25+15y=-6-4y ; 19y=-31 ; y=-\frac{31}{19}$$

Para buscar x sustituimos y en alguna ecuación donde esté x despejada.

$$x=\frac{5+3y}{2}=\frac{5+3\left(-\frac{31}{19}\right)}{2}=\frac{5-\frac{93}{19}}{2}=\frac{\frac{95-93}{19}}{2}=\frac{\frac{2}{19}}{2}=\frac{2}{38}=\frac{1}{19}$$

$$17.- \begin{cases} x+2y=10 \\ -x+y=-1 \end{cases}$$

$$18.- \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$19.- \begin{cases} 6x+3y=2x \\ 2x-3y=6 \end{cases}$$

$$20.- \begin{cases} 5x-3y=-8 \\ -3x+4y=12 \end{cases}$$

$$21.- \begin{cases} x-7y=5 \\ -2x+5y=21 \end{cases}$$

$$22.- \begin{cases} 2x-3y=1 \\ 7(2x-3y)+4x=11 \end{cases}$$

$$23.- \begin{cases} 2x-3(y+1)=0 \\ x+2(x-y)=2 \end{cases}$$

$$24.- \begin{cases} 3x-2(5-2y)+3=0 \\ 4(1-7y)-3(3-2x)=6 \end{cases}$$

$$25.- \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = -2 \end{cases}$$

$$26.- \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = 5 \\ \frac{5x}{3} - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$$

$$27.- \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{4}{3} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$28.- \begin{cases} \frac{5x}{6} + \frac{3y}{7} = 2 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 2 \end{cases}$$

$$29.- \begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{2y-3x}{6} = 8 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 18 \end{cases}$$

$$30.- \begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3 \\ 12x - 7y = 12 \end{cases}$$

$$31.- \begin{cases} 5(x-1) - 3(y+1) = 3(x-2) - 2(y-1) \\ 2(x+1) - 3(y+2) = x+1 - 4(y-3) \end{cases}$$

$$32.- \begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4x-3y=17 \end{cases}$$

$$33.- \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+y=5 \end{cases}$$

SOLUCIONES.

$$01.- x=2, y=0$$

$$02.- x=3, y=1$$

$$03.- x=10, y=15$$

$$04.- x=3, y=5$$

$$05.- x=1, y=8$$

$$06.- x=8, y=6$$

$$07.- x=3, y=-8$$

$$08.- x=-4, y=14$$

$$09.- x=13, y=31$$

$$10.- x=1, y=3$$

$$11.- x=3, y=2$$

$$12.- \text{Incompatible}$$

$$13.- x=\frac{5}{4}, y=-\frac{1}{4}$$

$$14.- x=7, y=12$$

$$16.- x=1, y=1$$

$$17.- x=4, y=3$$

$$18.- x=\frac{3}{2}, y=-\frac{5}{2}$$

$$19.- x=1, y=-\frac{4}{3}$$

$$20.- x=\frac{4}{11}, y=\frac{36}{11}$$

$$21.- x=-\frac{31}{9}, y=-\frac{172}{9}$$

$$22.- x=1, y=\frac{1}{3}$$

$$23.- x=0, y=-1$$

$$24.- x=\frac{20}{9}, y=\frac{1}{12}$$

$$25.- x=9, y=20$$

$$26.- x=3, y=4$$

$$27.- x=1, y=2$$

$$28.- x=\frac{24}{7}, y=-2$$

$$29.- x=\frac{264}{7}, y=\frac{246}{7}$$

$$30.- x=8, y=12$$

$$31.- x=7, y=10$$

$$32.- x=2, y=-3$$

$$34.- x=3, y=2$$

2.1. Definiciones.

1. DEFINICIONES

DEF: Llamo ecuación lineal con n incógnitas a toda expresión de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números conocidos que llamo COEFICIENTES; $x_1, x_2, \dots, x_n$ representan números desconocidos que llamo VARIABLES o INCOGNITAS y que en la práctica usamos $x, y, z, t \dots$; b es un número conocido que llamo TÉRMINO INDEPENDIENTE.

OBS: Para que una ecuación sea lineal, las incógnitas solo pueden aparecer multiplicadas por un número.

EJEMPLO: $2x+3y-z=7$ es una ecuación lineal.

$x^2+xy+3z=2$ No es una ecuación lineal.

DEF: Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

EJEMPLO:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - 2y + z = 3 \end{array} \right\} \text{ Sistema de 2 ecuaciones con 3} \\ \text{incógnitas}$$

DEF: Diremos que un conjunto de n números ordenados $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es UNA SOLUCION AL SISTEMA $\Leftrightarrow$ al sustituir x_1 por α_1, x_2 por $\alpha_2, \dots, x_n$ por α_n , las igualdades numéricas que nos quedan son todas ciertas.

EJEMPLO (CONTINUACION):

(3,2,1) es una solución al sistema anterior ya que al sustituir

$x = 3, y = 2, z = 1: 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$ cierto

$$2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 3 \text{ cierto}$$

2.2. Notación Matricial.

2. NOTACION MATRICIAL

DEF: Llamo MATRIZ DEL SISTEMA (1) a la matriz formada por los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Llamo VECTOR INCÓGNITA a la matriz columna formada por las incógnitas

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Llamo VECTOR TERMINO INDEPENDIENTE a la matriz columna formada por los términos independientes.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

PROP: Es equivalente tener el sistema (1) que tener la ecuación matricial $AX=b$, o sea, si $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es una solución del sistema (1) entonces,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

es solución de $AX=b$, o sea $A \cdot \alpha = b$

EJEMPLO (CONT.)

La matriz del sistema es : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

El vector incógnita es $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

El vector término independiente es $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Entonces:

$$AX=b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ 2x - 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

(A partir de la ecuación matricial puedo recuperar el sistema y viceversa)

DEF: Llamo MATRIZ AMPLIADA DEL SISTEMA, A_M , a la matriz

$$A_M = (A : b)$$

o sea, la matriz que resulta al añadir a la matriz de coeficientes A , la columna de los términos independientes.

OBS: Esta matriz contiene toda la información necesaria para resolver el sistema

EJEMPLO (CONT.)

$$A_M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 4 \\ 2 & -2 & 1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

2.3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. MÉTODO DE GAUSS.

Hacemos TRANSFORMACIONES⁽¹⁾ de la matriz ampliada del sistema hasta obtener una matriz de los tipos siguientes:

CASO 1⁽²⁾

$$A_M \equiv \dots \equiv \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix} \quad \text{donde: } \begin{cases} \blacksquare \text{ representa un número diferente de } 0 \\ * \text{ representa cualquier número real} \end{cases}$$

Es decir,

A es cuadrada, Triangular Superior y los elementos de la diagonal principal son diferentes de 0.

Entonces, el sistema tiene UNA ÚNICA SOLUCIÓN, y decimos que es COMPATIBLE, DETERMINADO.

Para hallar la solución, reintroducimos las incógnitas y despejamos, desde abajo hacia arriba.

(1) Más adelante veremos la lista completa de las TRANSFORMACIONES válidas para sistemas. De momento veremos las más importantes en los ejemplos que vienen a continuación.

(2) Suponemos que el sistema tiene 3 incógnitas, que es el caso más habitual en este nivel de enseñanza.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 6 \\ x + y - 6z = -1 \end{cases}$$

$$A_M = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -12 & -15 \\ 0 & -4 & 15 & 6 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 18 & -3 \end{array} \right)$$

$F_2 \equiv F_1 - 3F_3$ $F_3 \equiv F_2 + 2F_3$
 $F_3 \equiv F_1 - 3F_3$

Reintroduciendo las incógnitas y despejando de abajo hacia arriba:

$$F_3 \Rightarrow 18z = -3 \Rightarrow z = -\frac{1}{6}$$

$$F_2 \Rightarrow 8y - 12z = -15, \left(y \text{ reemplazando } z = -\frac{1}{6} \right) \Rightarrow 8y + 2 = -15 \Rightarrow y = -\frac{17}{8}$$

$$F_1 \Rightarrow 3x - y - 3z = 3 \Rightarrow 3x + \frac{17}{8} + \frac{3}{6} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

CASO 2

$$A_M \equiv \dots \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ (n=3, k=2, d=1) \end{array} \right) \quad \text{ó} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ (n=3, k=1, d=2) \end{array} \right)$$

Es decir,

A es Triangular Superior, los elementos de la diagonal principal son diferentes de 0, pero el número de filas (k) de la forma triangular, es menor que el número de columnas (n). Llamo d a la diferencia : $d=n-k$.

Entonces, el sistema tiene INFINITAS SOLUCIONES (que dependen de d parámetros), y decimos que es COMPATIBLE INDETERMINADO (con d grados de libertad).

Para hallar (la expresión del conjunto de) las soluciones, reintroducimos las incógnitas y despejamos, desde abajo hacia arriba, pasando d incógnitas a la derecha.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = 3 \\ x - 3y + 3z = -1 \\ 3x - 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$A_M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -11 & 5 \\ 0 & 5 & -11 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$F_2 \equiv F_1 - 2F_2$ $F_3 \equiv F_2 - F_3$
 $F_3 \equiv 3F_1 - 2F_3$

Reintroduciendo las incógnitas y despejando de abajo hacia arriba, pasando z a la derecha:

$$F_2 \Rightarrow 5y - 11z = 5 \Rightarrow 5y = 5 + 11z \Rightarrow y = 1 + \frac{11}{5}z$$

$$F_1 \Rightarrow 2x - y - 5z = 3 \Rightarrow 2x - \left(1 + \frac{11}{5}z \right) - 5z = 3 \Rightarrow x = 2 + \frac{18}{5}z$$

Por último, expresamos la solución *renombrando* z como un parámetro:

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{18}{5}t \\ y = 1 + \frac{11}{5}t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Nota: Esta expresión representa el conjunto de las infinitas soluciones del sistema. Si queremos una solución *concreta* solo tenemos que elegir un valor para el parámetro t .

Por ejemplo,

$$t = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 12 \\ z = 5 \end{cases} \text{ que podemos comprobar que es una solución del sistema.}$$

CASO 3.

$$A_M \equiv \dots \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array} \right)$$

Es decir,

En alguna fila de A_M todos los elementos excepto el término independiente son 0

Entonces, el sistema NO TIENE SOLUCIÓN, y decimos que es un sistema INCOMPATIBLE.

EJEMPLO

$$\begin{cases} 2x - y - 4z = 2 \\ x - 3y - z = 6 \\ 3x - 4y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$A_M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 6 \\ 3 & -4 & -5 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -10 \\ 0 & 5 & -2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right)$$

$F_2 \equiv F_1 - 2F_3$ $F_3 \equiv F_2 - F_3$
 $F_3 \equiv 3F_1 - 2F_3$

Entonces la última ecuación, nos dice que el sistema NO TIENE SOLUCIÓN.

TRANSFORMACIONES VÁLIDAS PARA SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. Cambiar una fila por una combinación de ella y otra(s) multiplicadas por números diferentes de 0.
2. Multiplicar (o dividir) una fila por un número distinto de 0.
3. Cambiar dos filas de sitio.
4. Cambiar dos columnas, que no sean la de términos independientes, de sitio, teniéndolo en cuenta cuando reintroduzcamos las incógnitas.
5. Tachar una fila cuyos elementos sean todos 0.

EJERCICIOS:

Calcular todas las soluciones de los siguientes sistemas:

$$1. \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3x + 4y + z = -1 \\ x + 3y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - 3y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 5y - z = -26 \\ 2x - 3y + z = 21 \\ -4x + y - 3z = -21 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ x - 2y + 3z = 4 \\ x + y - 6z = -1 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 3x - y - 2z = 8 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1.

$$x = \frac{2}{5}, y = \frac{-3}{5}, z = \frac{1}{5}$$

2.

$$x = -t + \frac{18}{5}, y = -t + \frac{11}{5}, z = t$$

3.

$$x = 1, y = -5, z = 4$$

4.

$$x = 3t + \frac{2}{3}, y = 3t - \frac{5}{3}, z = t$$

5.

$$x = t + \frac{9}{5}, y = t - \frac{13}{5}, z = t$$

2.4. Teorema de Roché – Frobenius.

4. TEOREMA DE ROCHE FROBENIUS

TEOREMA

Sea $AX=b$ un sistema de ecuaciones con n incógnitas, $A_M=(A:b)$ la matriz ampliada del sistema. Entonces:

- (1) $\text{rango } A = \text{rango } A_M = n \Rightarrow$ El sistema es Compatible Determinado
- (2) $\text{rango } A = \text{rango } A_M < n \Rightarrow$ El sistema es Comp. Indeterminado.
- (3) $\text{rango } A < \text{rango } A_M \Rightarrow$ El sistema es Incompatible.

OBS:

- (1) El rango de A siempre es menor o igual que el número de incógnitas, ya que A sólo tiene n columnas.

$$\text{rango } A \leq n$$

- (2) El rango de A_M siempre es menor o igual que el número de incógnitas más uno.

$$\text{rango } A_M \leq n+1$$

- (3) El rango de A siempre es menor o igual que el de A_M , ya que A está dentro de A_M .

$$\text{rango de } A \leq \text{rango de } A_M$$

5. METODO DE CRAMER

Sea $AX = b$ un sistema tal que A es cuadrada y $\det A \neq 0$:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Entonces, para todo i :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A}$$

donde A_i es la matriz que resulta al cambiar la columna correspondiente a la variable x_i por la columna de términos independientes.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \det A = (3+2+8) - (-3-4+4) = 13 - (-3) = 16$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{16} = \frac{(9+4+16) - (-6-8+12)}{16} = \frac{29 - (-2)}{16} = \frac{31}{16}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{16} = \frac{(-4+3+4) - (4-6+2)}{16} = \frac{3-0}{16} = \frac{3}{16}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{16} = \frac{(-6+8+24) - (-9+8+16)}{16} = \frac{26-15}{16} = \frac{11}{16}$$

EJERCICIOS.

Resolver por este método los ejercicios 1y 3 del apartado anterior.

2.6. Sistemas con un parámetro.

Son sistemas en los que alguno/s de los coeficientes y/o términos independientes no son números, dependen de una letra que llamamos parámetro.

EJEMPLO:

$$\begin{cases} kx - y - 3z = 3 \\ x - ky + 3z = 2k \\ x + y - 6z = -1 \end{cases}$$

Esta expresión representa un conjunto infinito de sistemas de ecuaciones. Para cada valor de k es un sistema diferente. Estos sistemas pueden ser de distinto tipo: compatibles determinados o indeterminados e incompatible

Problema tipo: Estudiar el sistema según los diferentes valores del parámetro.

Método Suponemos que la matriz del sistema es cuadrada.

Este método está basado en la siguiente propiedad:

A matriz cuadrada (n° ecuaciones = n° incógnitas)
Det A $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ El sistema es Compatible Determinado

- a) Calculamos el determinante de A.
- b) Resolvemos la ecuación, de incógnita k , $Det A = 0$
- c) Entonces:
 - Para los valores que **no** son solución de la ecuación, **Sistema compatible determinado.**
 - Para cada solución de la ecuación, sustituimos en A_M y resolvemos por Gauss: SOLO PUEDE SALIR **Compatible Indeterminado o Incompatible.**

Veamos el ejemplo:

$$A_M = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -k & 3 & 2k \\ 1 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right); \quad A = \begin{pmatrix} k & -1 & -3 \\ 1 & -k & 3 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}; \quad Det(A) = 6k^2 - 6k - 12$$

$$Det(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Entonces:

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2$, $Det(A) \neq 0$, entonces, el sistema es **Compatible Determinado** [20]

Si $k = -1$, reemplazamos en A_M y hacemos Gauss:

$$A_M = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema } \mathbf{Incompatible}.$$

Si $k = 2$, reemplazamos en A_M y hacemos Gauss:

$$A_M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -6 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y el sistema es **Compatible Indeterminado**,

EJERCICIOS

1. Estudiar según el valor del parámetro k el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y - kz = 0 \\ 3x + 4y + z = -1 \\ x + 3y - 3z = -2 \end{cases}$$

2. ¿Para qué valor de α el siguiente sistema tiene más de una solución? Resuélvelo en ese caso.

$$\begin{cases} x + \alpha y + 3z = 8 \\ 2x - y + z = 5 \\ x - 3y - 2z = -3 \end{cases}$$

3. Hallar los valores de a para los que el sistema siguiente es Incompatible. Comprueba el resultado por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = -26 \\ ax - 3y + z = 20 \\ -4x + y - 3z = -21 \end{cases}$$

4. Estudiar el siguiente sistema según los valores del parámetro k .

$$\begin{cases} kx - y - 3z = 3 \\ x - ky + 3z = 2k \\ x + y - 6z = -1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

- Si $k \neq -4$, Sistema Compatible Determinado. Una única solución.
Si $k = -4$, Sistema Incompatible. No tiene solución.
- Si $\alpha = 2$ Sistema compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones. Solución:
Solución:

$$x = -t + \frac{18}{5}, y = -t + \frac{11}{5}, z = t$$

(Si $\alpha \neq 2$, Sistema Compatible Determinado. Una única solución.

- Si $a = -\frac{8}{7}$, Sistema Incompatible. No tiene solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & -26 \\ -8 & -3 & 1 & 20 \\ -4 & 1 & -3 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & -26 \\ -8 & -21 & 7 & 140 \\ -4 & 1 & -3 & -21 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 = 8F_1 + 3F_2 \\ F_3 = 4F_1 + 3F_2 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & -26 \\ 0 & -23 & 13 & 212 \\ 0 & 23 & -13 & -167 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 = F_2 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & -26 \\ 0 & -23 & 13 & 212 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{array} \right]$$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq -1$, Sistema Compatible Determinado. Una única solución.
Si $k = 2$ Sistema compatible Indeterminado. Tiene infinitas soluciones.
Si $k = -1$, Sistema Incompatible. No tiene solución.

2.7. PROBLEMAS DE “LA VIDA REAL”.

En este curso veremos varias situaciones de la vida real que hemos de convertir en problemas matemáticos. En primer lugar hemos de ser capaces de situar el problema en el modelo (tema del curso) adecuado. Esto lo veremos observando la pregunta que nos hacen:

PREGUNTA			TEMA
Hallar x, y . (O hallar x, y, z)		→	Sistemas de ecuaciones
Hallar x e y , para que z sea máxima o mínima.	$\left\{ \begin{array}{l} z = ax + by + c \\ z \neq ax + by + c \end{array} \right.$	→	Programación Lineal
		→	Funciones reales

Una vez encuadrado el problema, pasamos a *plantearlo*. Para ello haremos al menos dos lecturas del problema, con los siguientes objetivos:

1ª LECTURA:

Familiarizarnos con el problema. Entender la situación que se plantea, imaginar que estamos dentro del problema.

Tomar notas de los datos principales. A veces es interesante expresarlos en una tabla.

Presta atención a las unidades: Kg., Litros, Euros,...

Identificar las incógnitas. Escribir lo más claro y concreto posible, qué significado tiene la $x, y, z, \dots$

2ª LECTURA:

Convertir cada frase significativa en una fórmula. En concreto, en este tema esas fórmulas serán ecuaciones lineales. En otros temas, puedes ser inecuaciones, y funciones más complejas.

Una vez planteado el problema, lo resolveremos usando los métodos matemáticos adecuados. Observa que la solución sea lógica en el contexto de la vida real. (Números positivos-negativos, enteros-fraccionarios,...).

Y, por último, comprueba el resultado *en el texto*, no en las fórmulas, ya que si el planteamiento no es correcto, al comprobar el resultado en las fórmulas no detectaríamos el error.

PROBLEMAS DE LA VIDA REAL.

- 01.- Si un número lo multiplico por cuatro, me da lo mismo que si le sumo 9. ¿Cuál es ese número?
- 02.- Halla un número de forma que su doble, aumentado en una unidad sea igual que su triple disminuido en tres unidades.
- 03.- Un número es el triple que otro y la diferencia de ambos es 26. ¿Cuáles son esos números?
- 04.- La suma de tres números consecutivos es 144. ¿Cuáles son esos números?
- 05.- Pepe tiene el doble de edad que Juan y Lorena tres años más que Pepe. ¿Cuál es la edad de cada uno?
- 06.- Juan tiene 28 años menos que su padre y 24 años más que su hijo. Calcula la edad de cada uno, sabiendo que entre los tres suman un siglo.
- 07.- Si compro 5 bolígrafos me sobran 2 €, pero si compro 9 bolígrafos me falta 1 €. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo y cuánto dinero tengo?
- 08.- Reparte 1000 € entre tres personas de forma que la primera reciba el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera.
- 09.- En las rebajas compré tres camisas y dos pantalones por 126 €. Recuerdo que el precio de un pantalón era el doble que el de una camisa. ¿Cuál es el precio de cada cosa?
- 10.- Preguntando a Pitágoras sobre el número de sus discípulos contestó: “La mitad estudia Matemáticas, una cuarta parte Física, una séptima parte guarda silencio y tres se dedican a la Geometría”. ¿Cuántos discípulos tenía?
- 11.- En una caja de herramientas el número de remaches que contiene es tres veces el de clavos, y el número de clavos es tres veces el de tornillos. Si entre remaches, clavos y tornillos hay 1872 piezas, ¿cuántos hay de cada clase?
- 12.- Un padre tenía tres hijos y les dejó en herencia 1600 coronas de oro. EL testamento precisaba que el primogénito debía recibir 200 coronas más que el segundo, y el segundo 100 coronas más que el último. ¿Qué cantidad recibió cada uno de los hijos?
- 13.- La suma de la altura de tres edificios es de 420 metros. El de altura media es 20 metros mayor que el más bajo y 35 metros menor que el más alto. ¿Cuánto mide cada uno de los edificios?
- 14.- Un negociante recorre tres plazas: en la primera duplica el dinero y gasta 180 € ; en la segunda triplica el dinero y gasta 180 €; en la tercera cuadruplica el dinero y se gasta 240 €. Hallar el dinero que tenía al principio sabiendo que acabó con 192 € .

- 15.- Se han consumido las $\frac{7}{8}$ partes de un bidón de aceite. Reponiendo 38 litros ha quedado lleno en sus $\frac{3}{5}$. Calcular la capacidad del bidón.
- 16.- Un granjero lleva una carga de huevos al mercado y piensa venderlos a 1'8 € la docena. En el camino se le rompen 18 docenas y calcula que vendiendo el resto a 2'1 € sacará el mismo dinero. ¿Cuántos huevos llevaba el granjero?
- 17.- Tengo una cierta cantidad de dinero. Me gasto el 20% en comprar una carpeta; 1'5 € en una revista y todavía me queda la mitad del dinero que tenía al principio. ¿Cuánto dinero tenía?
- 18.- Preguntó un muchacho a un anciano qué hora era y éste le contestó: "el tiempo de día transcurrido es igual a los $\frac{2}{3}$ de lo que queda por transcurrir". ¿Qué hora era?
- 19.- Un oso hormiguero y su pequeño cachorro encuentran una colonia de 455000 hormigas y se disponen a celebrar un gran banquete. Por razones evidentes de tamaño, el cachorro come los $\frac{2}{5}$ de las hormigas que devora el adulto. ¿Cuántas hormigas se ha comido cada uno?
- 20.- En las fiestas de Villamarfalpefufunca había una caseta de la que colgaba el siguiente letrero: "Pruebe su puntería. Por cada muñeco derribado le pagaremos 0'30 € y, por cada tiro fallado usted nos pagará 0'20 €".
El alcalde del pueblo, quiere demostrar a sus vecinos que su puntería es excelente y decide probar fortuna. Después de 26 tiradas observa que va ganando 3'80 € ¿Cuántos tiros ha fallado?
- 21.- Un padre tiene siete hijos. Cada muchacho tiene doble número de hermanas que de hermanos. ¿Cuántos varones y cuántas hembras son?
- 22.- Una empresa de autocares para excursiones dispone de dos clases de coches: de 40 y de 50 plazas. Son en total 24 coches y 1150 plazas. Averigua el número de autocares de cada clase que tiene la empresa.
- 23.- Un obrero gasta la quinta parte de su jornal para pagar su alojamiento, la mitad para comer y la décima parte en otros gastos. Averiguar su salario sabiendo que en siete días ha ahorrado 18 €
- 24.- Una persona realiza las $\frac{3}{5}$ partes de un viaje en ferrocarril, los $\frac{7}{8}$ del resto en autobús y los 26 kilómetros restantes en un taxi. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?
- 25.- Una botella y su corcho cuestan 0'60 € La botella cuesta 0'50 € más que el corcho. ¿Cuál es precio de cada cosa?
- 26.- El perímetro de un triángulo isósceles es 18 cm. Cada uno de los lados iguales es 3 cm. mayor que la base. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

- 27.- Un ciclista se entrena cada día recorriendo cierto trayecto. Hoy todavía le quedan 16 Km. y lleva recorridos los $\frac{22}{30}$ de dicho trayecto. Averiguar la distancia que recorre cada jornada.
- 28.- La cuarta parte de un campo está plantada de girasoles, los $\frac{3}{5}$ de trigo y el resto de cebada. Los girasoles ocupan media hectárea más que la cebada. ¿Cuál es la superficie del campo?
- 29.- Tres socios deciden repartirse el capital conseguido. Discuten la forma de hacerlo y llegan al acuerdo siguiente: uno de ellos debe recibir el doble que el segundo, y éste el triple que el tercero. Calcular la cantidad que dispondrá cada uno si el capital a repartir es la cuarta parte de 6 millones de euros.
- 30.- De un tonel se extrae agua tres veces consecutivas. En cada ocasión, un tercio del agua que hay en ese momento. Al finalizar las extracciones nos quedan 120 litros de agua. Calcular los litros que había en un principio.
- 31.- El padre de Luis se gastó 31'80 €. en un día de feria. El pequeño ha subido 12 veces en los "caballitos" y 18 veces en la "noría enana". En esta última atracción se pagaba 0'15 euros menos por viaje que en la primera. ¿Cuál era el precio de cada una de ellas?
- 32.- ¿Cuántos peldaños tiene una escalera si al subirlos de dos en dos y bajarlos de tres en tres das en total 100 pasos?
- 33.- Dos naufragos llegan a una isla deshabitada. Se dedican a recoger cocos hasta la noche, y deciden que a la mañana siguiente los repartirán a partes iguales. Durante la noche uno de los naufragos decide tomar su parte: divide el montón de cocos en dos partes iguales y le sobra un coco, que tira al mar para evitar líos. A continuación, esconde su parte.
 Más tarde, el otro naufrago decide también coger su parte, por lo que divide el montón que quedaba en dos partes iguales: también le sobra un coco, que tira al mar, y esconde la que creía su parte.
 A la mañana siguiente los naufragos guardan silencio de sus repartos nocturnos, y deciden repartirse los cocos que hay, tal como habían convenido. Al hacer este reparto, les corresponde 7 cocos a cada uno y les sobra un coco que tiran al mar. ¿Cuántos cocos habían recogido y cuántos se quedó cada naufrago?
- 34.- Un tercio de un enjambre de abejas se posó sobre una flor de silindha; un quinto sobre la flor de kadamba. Tres veces la diferencia entre los dos números voló a las flores de un kutuja, y quedó una sola abeja que se alzó por el aire, igualmente atraída por el grato perfume de un jazmín y de un pandanus. Dime tu ahora, joven fascinante, cuál era el número de abejas. (Poema hindú)
- 35.- Calcular el número de cromos que tiene Jaimito sabiendo que si tuviera el doble de los que tiene, aunque se le extraviaran 8 de ellos, podría repartir el resto con dos de sus amigos y aún le quedarían la mitad de los que ahora posee.
- 36.- Érase una vez un mago que tenía un cofre mágico que triplicaba el dinero que se depositaba en él. Cada vez que el mago realizaba este servicio pedía ser recompensado con 27 monedas de oro.
 Al llegar la noticia a oídos del rey quiso comprobarla y mandó a un emisario con cierta cantidad de monedas. El mago le devolvió el dinero triplicado y le cobró las 27 monedas. El emisario repitió la operación con todo el dinero que entonces tenía; volvió a triplicarle el dinero y pagó las 27 monedas. Repitió aún por tercera vez la operación pero, al pagar las 27 monedas al mago se quedó sin nada de dinero (*la avaricia rompe el saco*). ¿Cuántas monedas de oro le dio el rey al emisario?

- 37.- Preguntando a una persona por su edad, la respuesta que se obtiene es ésta: los $\frac{2}{5}$ de dicha edad menos $\frac{1}{9}$ de la edad que tendrá dentro de un año, es igual a $\frac{1}{3}$ de la que tenía hace 5 años. ¿Qué edad tendrá dentro de 5 años?
- 38.- Un amo promete a su criado darle al cabo de un año una capa y 12 monedas de oro. Al terminar el séptimo mes lo despide dándole la capa y dos monedas de oro. ¿Cuál es el valor de la capa?
- 39.- Dos pastores se encuentran en un campo. Uno de ellos le pregunta al otro: “¿cuántas ovejas tienes?”, a lo que responde: “si te doy una a ti tenemos las mismas, y si tú me das una a mí, yo tengo el doble que tú”. ¿Cuántas ovejas tiene cada uno?
- 40.- A un extranjero que pagó un billete de avión que valía 33510 pts. con 200 dólares y 90 francos franceses, le devolvieron 200 pts. Ese mismo día había pagado un par de zapatos que costaban 3830 pts. con 20 dólares, 30 francos franceses y 60 pts. ¿Cuál era la cotización del dólar y del franco francés ese día?
- 41.- Para realizar un largo viaje, salí de casa con 300 € en billetes de 20 y 5 €. Al llegar a mi destino, llevaba tantos billetes de 20 como billetes de 5 tenía al principio y tantos billetes de 5 como billetes de 20 tenía al principio. Llegué con los $\frac{3}{4}$ del dinero con el que partí. ¿Cuántos billetes de 20 y cuántos billetes de 5 llevaba al salir de casa?
- 42.- Cada mochuelo a su olivo y sobra un mochuelo. Dos mochuelos en cada olivo y sobra un olivo. ¿Cuántos olivos y mochuelos hay?
- 43.- Todo el mundo sabe, o debería saber..., que los escarabajos tienen seis patas y las arañas ocho. Un excéntrico coleccionista de estos simpáticos animalitos ha decidido vestirlos a la última moda. Para ello necesita 278 sombreros y 976 pares de zapatos. Si además quiere poner corbata a los escarabajos y pajarita a las arañas, ¿cuántas corbatas y pajaritas necesitará comprar?

SOLUCIONES

- 01.- El número es 3. 02.- El número es 4. 03.- Los números son 13 y 19
- 04.- Los números son 47, 48 y 49. 05.- Faltan datos.
- 06.- Juan 32 años, su padre 60 y su hijo 8. 07.- Un bolígrafo cuesta 0'75 € y llevo 5'75 €
- 08.- La primera 600 €, la segunda 300 € y la tercera 100 €
- 09.- 18 € las camisas y 36 € los pantalones. 10.- 28 alumnos.
- 11.- 1296 remaches, 432 clavos y 144 tornillos.
- 12.- El primogénito 700 coronas, el segundo 500 coronas y el menor 400 coronas.
- 13.- El más alto 170 metros, el mediano 135 metros y el más bajo 115 metros.
- 14.- Al principio tenía 92 €. 15.- 80 litros. 16.- 126 docenas = 1512 huevos.
- 17.- Tenía 5 €. 18.- Las 9 horas 36 minutos.
- 19.- El adulto 325000 hormigas y el cachorro 130000 hormigas.
- 20.- Ha fallado 8 tiros y ha acertado 18. 21.- Son 3 chicos y 4 chicas.
- 22.- 5 autocares de 40 plazas y 19 de 50 plazas. 23.- 90 € semanales.
- 24.- 520 Km. 25.- 0'05 € el corcho y 0'55 € la botella.
- 26.- La base 4 cm y los lados iguales 7 cm. 27.- 60 Km.
- 28.- 5 hectáreas. 29.- El 3º 600.000 €, el 2º 1.800.000 € y el 1º 3.600.000 €.
- 30.- 405 litros. 31.- 1'15 € los caballitos y 1 € la noria enana
- 32.- 120 peldaños. 33.- Han cogido 63 cocos, el primero se lleva 38, el segundo 22 y tiran 3 al mar.
- 34.- 15 abejas. 35.- 16 cromos 36.- 13 monedas de oro
- 37.- 40 años. Ahora tiene 35. 38.- 12 monedas de oro.
- 39.- Uno 5 ovejas y el otro 7. 40.- EL dólar a 160 Pts. y el franco a 19 Pts. (Eran los 80...)
- 41.- 13 billetes de 20 € y 8 billetes de 5 €. 42.- 4 mochuelos y 3 olivos.
- 43.- 136 corbatas (escarabajos) y 142 pajaritas (arañas).

MÁS---

Ejercicio nº 1.-

En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

- a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?
- b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Solución:

- a) Solo con estos datos no podemos saber el número de hombres (ni el de mujeres, ni el de niños) que hay. Es un sistema compatible indeterminado; como tenemos tres incógnitas, para que pueda ser compatible determinado, necesitamos otra ecuación.
- b) Hay 12 hombres, 6 mujeres y 4 niños.

Ejercicio nº 2.-

Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que, el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10% de descuento.

Solución:

El rotulador marcaba 1,80 euros, el cuaderno, 0,90 euros y, la carpeta, 1,26 euros.

Ejercicio nº 3.-

En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiante, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.
- b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

Se compran 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

Ejercicio nº 4.-

Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A , B y C . El primer lingote contiene 20 g del metal A , 20 g del B y 60 del C . El segundo contiene 10 g de A , 40 g de B y 50 g de C . El tercero contiene 20 g de A , 40 g de B y 40 g de C . Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A , 35 g de B y 50 g de C .

¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

Solución:

Habría que coger 25 g del primer lingote, 50 g del segundo y 25 g del tercero.

Ejercicio nº 5.-

Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 € por 24 l de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 l de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 l de aceite cuesta el triple que 1 l de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 l de aceite más 4 l de leche.

Solución:

leche 1 €, jamón 16 €, aceite 3 €

3. INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL.

3.1. Dibujo de rectas

Una recta es el conjunto de puntos (x,y) del plano, que son solución de una ecuación lineal del tipo $ax + by = c$, donde a , b y c , son números conocidos.

Para dibujar una recta, es suficiente con conocer dos puntos. Siempre que sea posible, buscaremos los *puntos de corte con los ejes de coordenadas*.

CASO 1: $a, b, c \neq 0$

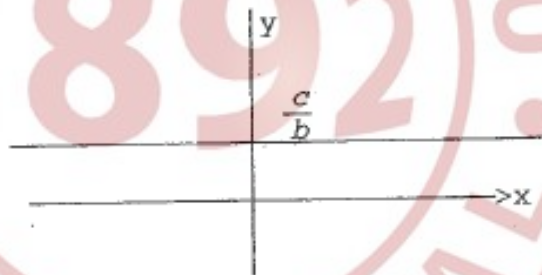
Puntos de corte con:

$$\text{eje } x: y=0 \rightarrow ax=c \rightarrow x=\frac{c}{a} \rightarrow P=\left(\frac{c}{a}, 0\right)$$

$$\text{eje } y: x=0 \rightarrow by=c \rightarrow y=\frac{c}{b} \rightarrow P=\left(0, \frac{c}{b}\right)$$

CASO 2: $a=0, b \neq 0$

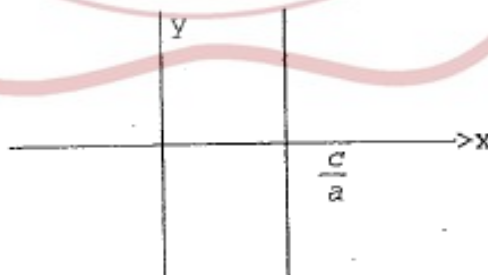
Entonces $by=c \rightarrow y=\frac{c}{b}$ recta horizontal por el punto $\left(0, \frac{c}{b}\right)$



si $c = 0$, nos queda $y = 0$ que es el EJE X

CASO 3: $a \neq 0, b=0$

Entonces $ax=c \rightarrow x=\frac{c}{a}$ recta vertical por el punto $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$



si $c = 0$ nos queda $x = 0$ que es el EJE Y

CASO 4: $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$

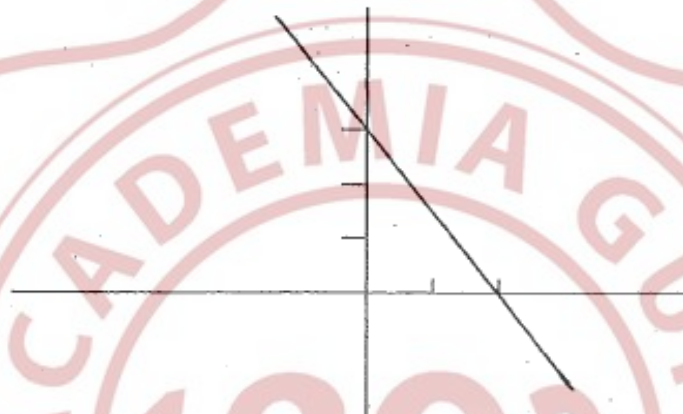
Solo hay un punto de corte con los ejes, que es el $(0, 0)$. Buscamos otro punto dándole un valor cualquiera a x , y calculando y .

EJEMPLOS:

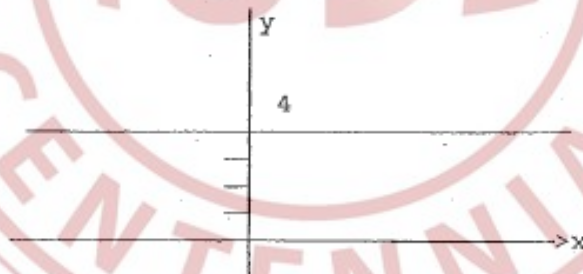
(1) $3x + 2y = 6$

$$\text{si } x=0 \rightarrow 2y=6 \rightarrow y=3 \rightarrow P_1 = (0, 3)$$

$$\text{si } y=0 \rightarrow 3x=6 \rightarrow x=2 \rightarrow P_2 = (2, 0)$$



(2) $2y = 8 \rightarrow y = 4$ RECTA HORIZONTAL POR $P = (0, 4)$

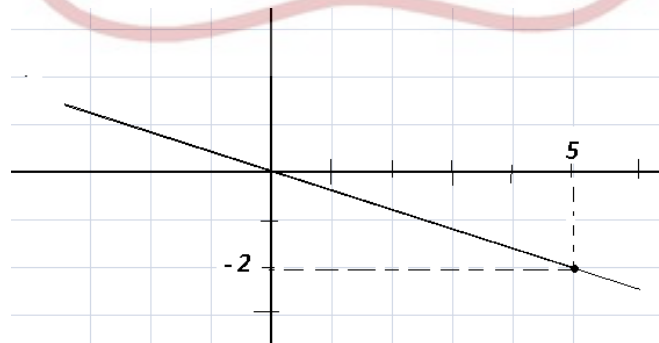


(3) $2x + 5y = 0$

Como el término independiente es 0, pasa por el $(0, 0)$.

Buscamos otro punto:

$$\text{Si } x = 5 \Rightarrow 10 + 5y = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (5, -2)$$



3.2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas.

2. RESOLUCION GRAFICA DE INECUACIONES CON 2 INCOGNITAS

DEF: Una inecuación con dos incógnitas es una expresión del tipo

$$ax+by \leq c$$

El signo $\leq$ también puede ser $<$ ó $>$ ó $\geq$

La REGION SOLUCION DE LA INECUACION, es el conjunto de puntos (x,y) que al sustituirlos en la inecuación hacen que la desigualdad sea cierta.

CALCULO DE LA REGION SOLUCION

- (1) Dibujar la recta cuya ecuación es $ax + by = c$ (con esto tengo el plano dividido en dos partes)
- (2) Tomar un punto $P = (x_0, y_0)$ que no esté en la recta y sustituirlo en la inecuación:
 - Si la desigualdad es cierta, entonces, el semiplano donde está P es la región solución. Lo pintamos.
 - Si la desigualdad es falsa, entonces, el semiplano donde no está P es la región solución. Lo pintamos.

EJEMPLO

Resolver $3x - 2y \leq 12$

- (1) Tomo la ecuación asociada $3x - 2y = 12$

Busco dos punto:

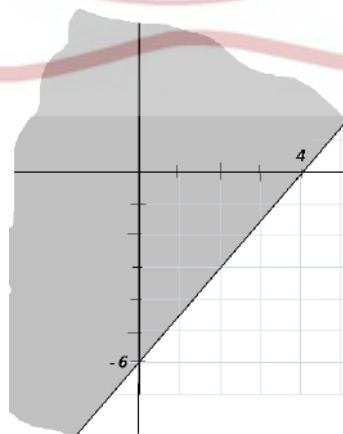
$$\text{si } x=0 \rightarrow -2y=12 \rightarrow y=-6 \rightarrow P_1=(0,-6)$$

$$\text{si } y=0 \rightarrow 3x=12 \rightarrow x=4 \rightarrow P_2=(4,0)$$

Dibujó la recta.

- (2) Tomo un punto P que no esté en la recta, por ejemplo $P = (0,0)$ y lo sustituyo: $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 < 12$, luego la región solución es en la que está el $(0,0)$.

OBS: Si la desigualdad es $\leq$ ó $\geq$, la recta forma parte de la región solución. Si la desigualdad es $<$ ó $>$ entonces no.



3.3. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

Dado un sistema de inecuaciones con dos incógnitas:

$$a_1x + b_1y \leq c_1$$

$$a_2x + b_2y \geq c_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_nx + b_ny \leq c_n$$

La región solución del sistema es el conjunto de puntos (x,y) tales que al sustituirlos en todas las inecuaciones del sistema, las desigualdades son ciertas.

EJEMPLO

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2x-y \leq 2 \\ x-3y \geq -3 \end{cases}$$

pasapór $P_1 = (0,0)$

$x+y=0$:

si $x=1 \Rightarrow 1+y=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow P_2=(1,-1)$

si $x=0 \Rightarrow -y=2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow P_3=(0,-2)$

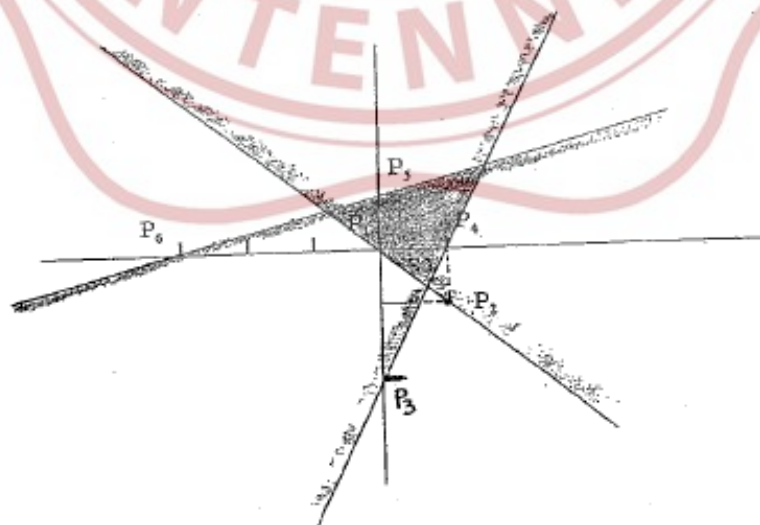
$2x-y=2$:

si $y=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow P_4=(1,0)$

si $x=0 \Rightarrow -3y=-3 \Rightarrow y=1 \Rightarrow P_5=(0,1)$

$x-3y=-3$:

si $y=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow P_6=(-3,0)$



3.4. Problemas de Optimización-

Un problema de optimización consta de:

Una función del tipo $z = f(x, y) = axd + by + c$ de la que queremos encontrar un máximo y/o un mínimo.

Un sistema de inecuaciones lineales, con incógnitas x e y .

METODO DE RESOLUCIÓN:

- (1) Dibujar la región solución del sistema de inecuaciones.
- (2) Hallar los vértices de la región solución. Para hallar el vértice intersección de dos rectas, se resuelve el sistema de las dos ecuaciones de dichas rectas.

$$V_1 = (x_1, y_1), V_2 = (x_2, y_2), \dots, V_k = (x_k, y_k) \quad \text{Vértices}$$

- (3) Sustituyo cada uno de los vértices en la función Z :

$$z_1 = z(V_1) = ax_1 + by_1 + c$$

$$z_2 = z(V_2) = ax_2 + by_2 + c$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

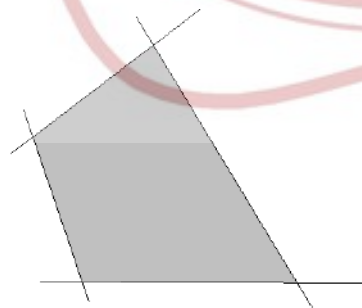
$$z_k = z(V_k) = ax_k + by_k + c$$

- (4) Si la región es CERRADA(*), entonces, el mayor de los $z_1, \dots, z_k$ es el máximo y el menor el mínimo.

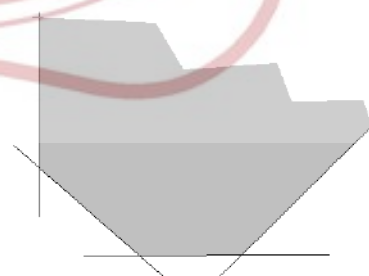
OBS:

- (1) Si la región es ABIERTA(*), entonces podemos tener el máximo o el mínimo pero no ambos.
- (2) Si dos valores de z son iguales y son el máximo (o mínimo) entonces en todos los puntos del segmento que une ambos vértices se alcanza el máximo.

(*)



Región cerrada



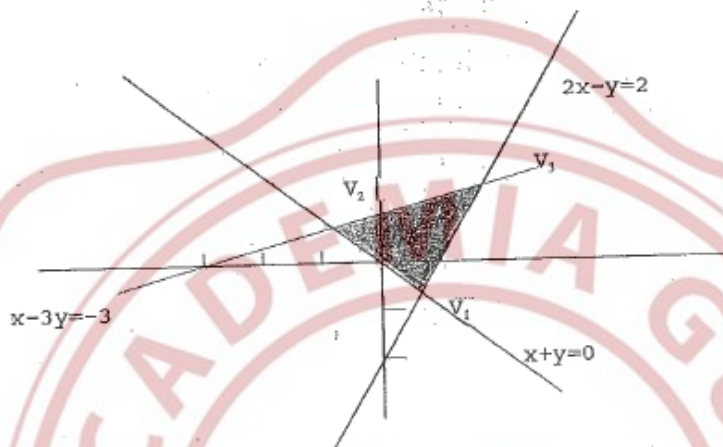
Región abierta

EJEMPLO: CONT.

Hallar el máximo y el mínimo, así como los puntos donde se alcanzan dichos puntos, de la función $z = 3x + 2y$ con las restricciones

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2x-y \leq 2 \\ x-3y \geq -3 \end{cases}$$

Como las restricciones son las mismas del ejemplo anterior, la región solución es



Esta región tiene tres vértices:

V_1 : punto de corte de $x + y = 0$ y $2x - y = 2$, luego V_1 es la solución de

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ 2x-y = 2 \end{cases} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{cases} x+y = 0 \\ 3x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow V_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

V_2 : punto de corte de $x + y = 0$ y $x - 3y = -3$

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x-3y = -3 \end{cases} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{cases} x+y = 0 \\ -4y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow V_2 = \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

V_3 : punto de corte de $x - 3y = -3$ y $2x - y = 2$

$$\begin{cases} 2x-y = 2 \\ x-3y = -3 \end{cases} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{cases} 2x-y = 2 \\ 5y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \rightarrow V_3 = \left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Calculamos la z :

$$z_1 = z(V_1) = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0'6$$

$$z_2 = z(V_2) = 3\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{6}{4} = -\frac{3}{4} = -0'75$$

$$z_3 = z(V_3) = 3\left(\frac{9}{5}\right) + 2\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{27}{5} + \frac{16}{5} = \frac{43}{5} = 8'6$$

MAXIMO DE z : $8'6$ y lo alcanza en el punto $\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$

MINIMO DE z : $-0'75$ y lo alcanza en el punto $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$

3.5. Problemas de la vida real.

Como ya comentamos en la página 32, resolveremos por las técnicas de este tema, los problemas de la vida real en que nos pidan:

Hallar x e y para que z , sea máxima o mínima, donde z tiene que ser de primer grado:

$$z = f(x, y) = ax + by + c.$$

Los problemas más habituales que se resuelven por estas técnicas son:

PROBLEMAS DE STOCKS (a desarrollar en clase)

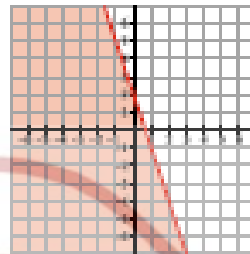
PROBLEMAS DE GASTO MÍNIMO. (a desarrollar en clase).



EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

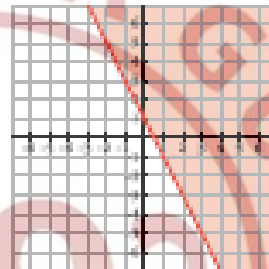
EJERCICIO 1 :

- a) Haz una representación gráfica de las soluciones de la siguiente Inecuación: $x + 2y \geq 4$
- b) Halla la siguiente Inecuación cuyas soluciones vienen representadas por:



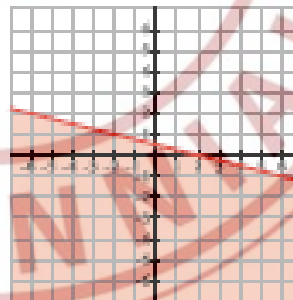
EJERCICIO 2 :

- a) Representa gráficamente las soluciones de la Inecuación: $2x - y \leq 3$
- b) Averigua cuál es la Inecuación cuyas soluciones corresponden al siguiente semiplano:



EJERCICIO 3 :

- a) Representa las soluciones de la siguiente Inecuación: $3x + 4y \geq 1$
- b) Identifica la Inecuación cuyas soluciones corresponden al siguiente semiplano:



EJERCICIO 4 :

- a) Dibuja el recinto que cumple estas restricciones:
$$\begin{cases} x + 3y \leq 15 \\ 5x + y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
- b) ¿Pertenecen los puntos: (0, 6), (4, 0) y (5, 6) al conjunto de soluciones del sistema anterior?

EJERCICIO 5 :

a) Construye el recinto de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y \leq 120 \\ 3x + 6y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Los puntos $(20, 10)$, $(20, 0)$ y $(20, 20)$, ¿forman parte de las soluciones del sistema anterior?

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

EJERCICIO 6 : Maximiza la función $z = 150x + 100y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 600 \\ 2x + y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 7 : Halla el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$, en la región determinada por:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

EJERCICIO 8 : Se considera la función $z = 3x + 2y$. Determina el punto donde la función toma su valor mínimo,

con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 5y \geq 20 \\ 7x + 2y \geq 14 \end{cases}$$

EJERCICIO 9 : Minimiza la función $z = 5x + 6y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 6 \leq x \leq 15 \\ 4 \leq y \leq 7 \\ x \geq y \end{cases}$$

EJERCICIO 10 : Minimiza la función $f(x, y) = 4x + 12y$ sujeta a las restricciones:

$$y \geq 0; \quad 3y - 2x \leq 5; \quad y + x \leq 5; \quad 3y + x \geq 2.$$

EJERCICIO 11 : Maximiza la función objetivo: $f(x, y) = 2x + y$, sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + y \leq 6 \\ -x + y \leq 3 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 12 : Un laboratorio utiliza las sustancias A y B en la elaboración de dos vacunas. La primera se prepara con 2 unidades de A y 1 de B , siendo su precio de 30 euros, y la segunda se elabora con 2 unidades de A y 3 de B , siendo su precio de 40 euros. Sabiendo que dicho laboratorio dispone de un total de 400 unidades de A y 300 de B , ¿Cuántas vacunas de cada tipo deberá preparar para obtener el máximo beneficio?

EJERCICIO 13 : Una fábrica produce neveras utilitarias y de lujo. La fábrica está dividida en dos secciones: montaje y acabado. Los requerimientos de trabajo vienen dados por la siguiente tabla:

	MONTAJE	ACABADO
UTILITARIA	3 horas	3 horas
LUJO	3 horas	6 horas

El máximo número de horas de trabajo disponibles diariamente es de 120 en montaje y 180 en acabado, debido a las limitaciones de operarios. Si el beneficio es de 300 euros por cada nevera utilitaria y de 400 euros por cada nevera de lujo, ¿cuántas deben fabricarse diariamente de cada una para obtener el máximo beneficio?

EJERCICIO 14 : En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B . En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de una unidad de A y cinco de B , y el tipo II con una composición de cinco unidades de A y una de B . El precio del tipo I es de 10 euros y el del tipo II es de 30 euros. Se pregunta: ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

EJERCICIO 15 : Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas, A y B . La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón, que se venden a 30 euros; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 euros. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la B . ¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar la ganancia?

EJERCICIO 16 : Cierta fabricante produce dos artículos, A y B , para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: sección de montaje y sección de pintura. El artículo A requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos en la de pintura; y el artículo B , tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura. La sección de montaje solo puede estar en funcionamiento nueve horas diarias, mientras que la de pintura solo ocho horas cada día. El beneficio que se obtiene produciendo el artículo B es de 40 euros y el de A es de 20 euros. Calcula la producción diaria de los artículos A y B que maximiza el beneficio.

EJERCICIO 17 : Se desea obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias A y B . Un kilo de A contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero; un kilo de B tiene 4 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Se desea obtener al menos 16 gramos del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gramos, respectivamente; y la cantidad de A es como mucho el doble que la de B . Calcula los kilos de A y los de B que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo de A vale 2 euros y uno de B 10 euros. ¿Puede eliminarse alguna restricción?

EJERCICIO 18 : Un quiosco vende bolígrafos a 20 céntimos de euro y cuadernos a 30 céntimos de euro. Llevamos 120 céntimos de euro y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos, por lo menos. ¿Cuál será el número máximo de piezas que podemos comprar?

EJERCICIO 19 : Disponemos de 210 000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las de tipo B que rinde el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130 000 euros en las de tipo A y, como mínimo, 6 000 euros en las de tipo B . Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B . ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo interés anual?

EJERCICIO 20 : La casa X fabrica helados A y B , hasta un máximo diario de 1 000 kilos. La fabricación de un kilo de A cuesta 1,8 euros y uno de B , 1,5 euros. Calcula cuántos kilos de A y B deben fabricarse, sabiendo que la casa dispone de 2 700 euros/día y que un kilo de A deja un margen igual al 90% del que deja un kilo de B .

EJERCICIO 21 : En una pequeña empresa se fabrican diariamente solo dos tipos de aparatos, A y B . Como máximo pueden fabricarse 3 aparatos de cada tipo y, obligatoriamente, al menos un artículo del tipo B . Indica todas las posibilidades de fabricación si se quieren obtener unas ventas superiores a 60 euros, teniendo en cuenta que los precios de los artículos A y B son de 30 y 10 euros, respectivamente.

EJERCICIO 22 : Se desea fabricar dos tipos de bombones que llamaremos A y B . Las cajas de tipo A contienen 1 kg de chocolate y 2 kg de cacao; las de tipo B contienen 2 kg de chocolate, 1 kg de cacao y 1 kg de almendras. Por cada caja del tipo A se ganan 2 euros y por cada caja del tipo B , 3 euros. Disponemos de 500 Kg de chocolate, 400 Kg de cacao y 225 Kg de almendras. ¿Cuántas cajas de cada tipo hay que fabricar para que la ganancia sea máxima?

EJERCICIO 23 : Una fábrica de papel tiene almacenados 4 000 kilos de pasta de papel normal, A , y 3 000 kilos de pasta de papel reciclado, B . La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. La caja de tipo 1 está fabricada con 0,2 kilos de A y 0,1 kilos de B , mientras que la caja del tipo 2 está fabricada con 0,2 kilos de A y 0,3 kilos de B . El precio de la caja de tipo 1 es de 50 euros/unidad y el precio de la caja de tipo 2 es de 60 euros/unidad. ¿Cuántas cajas de cada clase ha de elaborar la fábrica para maximizar sus ventas?

EJERCICIO 24 : Podemos comprar paquetes de abono A_1 o A_2 . Cada paquete contiene las unidades de potasio (K), fósforo (P) y de nitrógeno (N_2) indicadas en la tabla, donde se da el precio (en céntimos de euro) de un paquete. ¿En qué proporción hay que mezclar ambos tipos de abono para obtener al mínimo precio un abono que contenga, al menos, 4 unidades de K , 23 de P y 6 de N_2 ?

MARCA	K	P	N_2	PRECIO
A_1	4	6	1	15
A_2	1	10	6	24

EJERCICIO 25 : Se dispone de 600 g de un determinado fármaco para elaborar pastillas grandes y pequeñas. Las grandes pesan 40 g y las pequeñas 30 g. Se necesitan, al menos, tres pastillas grandes y, al menos, el doble de pequeñas que de grandes. Cada pastilla grande proporciona un beneficio de 0,2 euros y la pequeña, de 0,1 euros. ¿Cuántas pastillas se han de elaborar de cada clase para que el beneficio sea máximo?

4. GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO.

4.1. PUNTOS Y VECTORES.

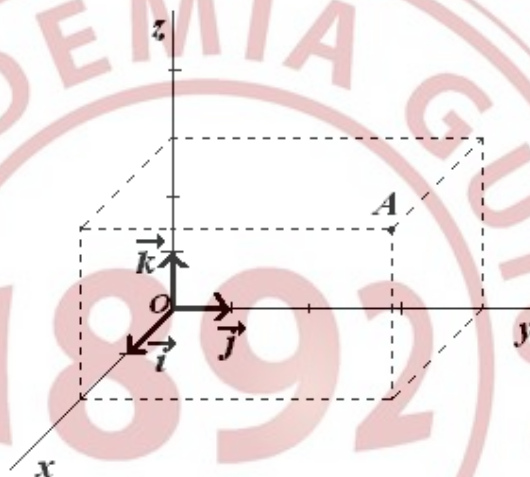
DEF: Llamamos ESPACIO AFÍN DE DIMENSIÓN 3, y lo representamos por A_3 al conjunto:

$$A_3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

A los elementos de este conjunto les llamamos PUNTOS y los representamos habitualmente por letras mayúsculas: A, B, C,...

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. ⁽¹⁾

Suponemos que existe un *sistema de referencia* inicial $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, donde O es un punto que llamamos ORIGEN, e $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son tres vectores perpendiculares entre sí y de misma longitud (que tomaremos como unidad), desde donde "observamos" el espacio. Así, por ejemplo, el punto $A = (2, 4, 3)$ quedaría representado así:

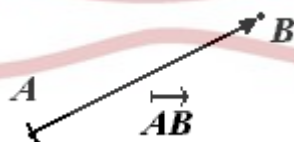


DEF: Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, dos puntos del espacio, llamamos VECTOR FIJO DE ORIGEN A Y EXTREMO B y lo representamos por $\overrightarrow{AB}$ a la expresión:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

El vector $\overrightarrow{AB}$ es el segmento orientado ("flecha"), que empieza en el punto A y acaba en el punto B.



El **MÓDULO** del vector $\overrightarrow{AB}$, es la longitud de dicho vector (distancia desde A hasta B), lo representamos por $|\overrightarrow{AB}|$ o bien por $\|\overrightarrow{AB}\|$. Su valor es:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

La **DIRECCIÓN** del vector $\overrightarrow{AB}$ es la de la única recta que pasa por A y B.

El SENTIDO del vector $\overrightarrow{AB}$ es desde A hacia B.

En el lenguaje coloquial es frecuente utilizar los términos dirección y sentido como sinónimos. Matemáticamente son términos claros:

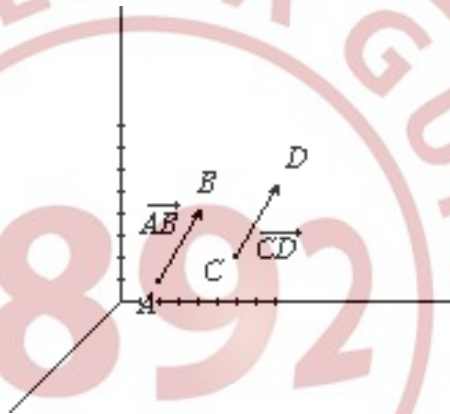
$\text{dirección}(\overrightarrow{AB}) = \text{dirección}(\overrightarrow{BA})$; pero $\text{sentido}(\overrightarrow{AB}) = -\text{sentido}(\overrightarrow{BA})$

A nivel práctico los conceptos de dirección y sentido se utilizan pocas veces en términos absolutos. Normalmente se utilizan en términos relativos, es decir, para comparar direcciones y/o sentidos entre dos ó más vectores, rectas o planos.

EJEMPLO-OBSERVACIÓN.

Sean $A=(0,2,1)$, $B=(0,4,5)$, $C=(0,4,3)$ y $D=(0,6,7)$.

Entonces $\overrightarrow{AB}=(0,2,4)$ y $\overrightarrow{CD}=(0,2,4)$. Es decir, numéricamente $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, pero, geoméricamente no se representan igual, no son la misma "flecha".



Para evitar esta paradoja geométrica definimos el concepto de VECTOR LIBRE.

DEF: El VECTOR LIBRE $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ es el conjunto de los infinitos vectores fijos que tienen componentes (v_1, v_2, v_3) . A cada uno de ellos se le llama un representante de $\vec{v}$.

EJEMPLO (Continuación).

En el ejemplo anterior, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son dos representantes del vector libre $\vec{v}=(0, 2, 4)$.

En lo sucesivo interpretaremos que todos los vectores son libres excepto cuando se indique lo contrario. Al conjunto de todos los vectores libres lo representaremos por V_3

(1) Cuando desarrollamos una teoría matemática no podemos utilizar términos que aún no han sido definidos. En las INTERPRETACIONES GEOMÉTRICAS me saltaré este principio pues, en realidad, no forman parte de la teoría.

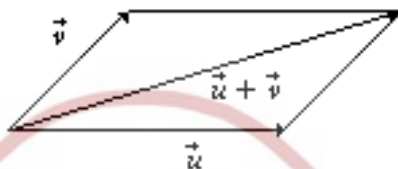
4.2. OPERACIONES CON PUNTOS Y VECTORES.

SUMA DE VECTORES (Vector + Vector = Vector).

DEF: Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores. Entonces

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. (Regla del paralelogramo)



PROPIEDADES

1. Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
2. Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. Elemento neutro: Si $\vec{O} = (0,0,0)$ entonces $\vec{v} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{v} = \vec{v}$. El vector $\vec{O}$ tiene módulo 0 y carece de dirección y sentido. Gráficamente es un punto.
4. Vector opuesto: Dado un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, existe un vector $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{O}$.

Este vector cumple las siguientes propiedades:

- a) $|\vec{-u}| = |\vec{u}|$
- b) Dirección $(-\vec{u}) = \text{Dirección } (\vec{u})$
- c) Sentido $(-\vec{u}) = -\text{Sentido } (\vec{u})$. (Sentido contrario).
- d) $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$



PRODUCTO EXTERNO: (Número • Vector = Vector)

DEF: Sea α un número y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector, entonces $\alpha \cdot \vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$. Es decir, multiplicamos las tres componentes del vector por el número.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

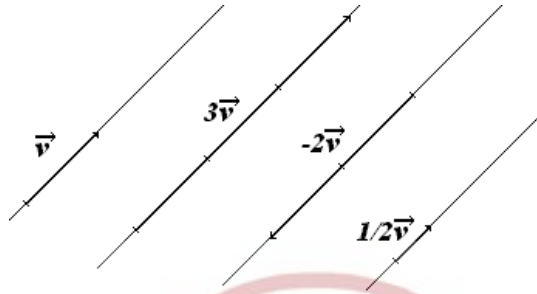
Al multiplicar un vector por un número:

- La longitud del vector queda multiplicada por el valor absoluto de ese número:

$$|\alpha \cdot \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$$

- La dirección del vector no cambia.
- Si el número es positivo, el sentido se mantiene. Si es negativo, el sentido se invierte.

EJEMPLO GRÁFICO



PROPIEDADES:

Sean α y β dos números, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores. Entonces:

1. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$
2. $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
3. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{v}$
4. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

PRODUCTO ESCALAR (Vector • Vector = Número).

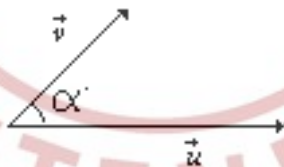
DEF: Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores. Entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

INTERPERETACIÓN GEOMÉTRICA.

Si α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$



PROPIEDADES:

1. $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
2. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
4. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$
5. $\alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$
6. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

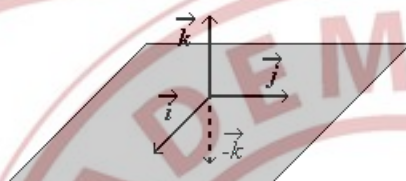
PRODUCTO VECTORIAL (Vector • Vector = Vector).

DEF: Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores. Entonces

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

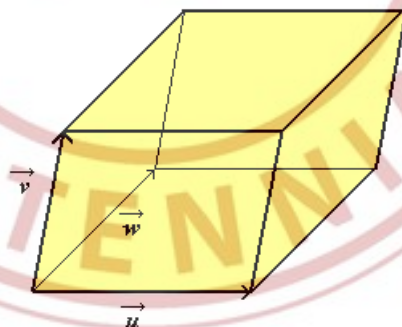
- $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha)$; donde α es el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Este módulo coincide con el área que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- La dirección de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es la única perpendicular común a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- El sentido es siguiendo *La ley del Tornillo*⁽¹⁾



$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \text{ pero } \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$$

PROPIEDADES.

1. *Asociativa:* $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$
2. *Anticonmutativa:* $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.
3. *Bilineal:* $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
 $\alpha \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \cdot \vec{v})$
4. *Producto Mixto:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \text{Volumen que determinan } \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \vec{w}$



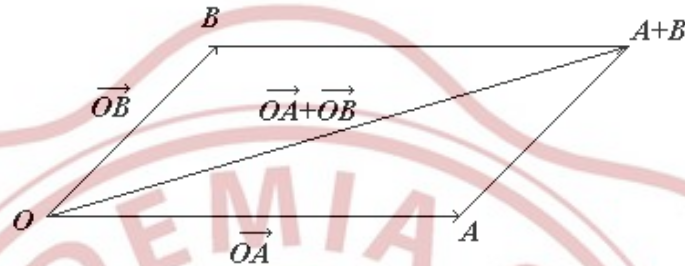
SUMA DE PUNTOS (punto + punto = punto)⁽²⁾.

DEF: Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ dos puntos. Entonces

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

$A+B$ es el extremo del vector fijo $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$



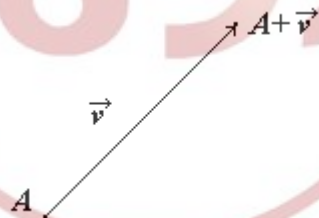
SUMA PUNTO + VECTOR (punto + vector = punto).

DEF: Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ un punto y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector. Entonces

$$A + \vec{v} = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3).$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

$A + \vec{v}$ es el extremo del representante de $\vec{v}$ que tiene su origen en el punto A.



(1) Si colocamos un tornillo sobre la intersección de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ y giramos en dirección a $\vec{j}$, estamos apretando el tornillo, es decir, el resultado tiene el sentido del vector $\vec{k}$.

(2) En realidad las operaciones en que interviene puntos son operaciones con vectores, en las que hemos identificado el punto A con el vector $\overrightarrow{OA}$, ya que numéricamente son iguales.

EJERCICIOS OPERACIONES CON PUNTOS Y VECTORES.

Sean

$\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (4, 5, -7)$ **dos vectores** y $A = (0, 2, 3)$, $B = (-1, 6, 3)$ **dos puntos**.

- a) Calcular: $|\vec{u}|$, $\vec{u} + \vec{v}$, $3\vec{u}$, $2\vec{u} + 5\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $A + B$, $B + 5\vec{v}$, $2\vec{u} + \overrightarrow{AB}$
- b) Hallar un vector *unitario* con la misma dirección y sentido que $\vec{v}$.
- c) Hallar un vector de módulo 4 con la misma dirección y sentido contrario que $\vec{u}$.
- d) Calcular k para que el vector $\vec{w} = (3 + k, 2, -k)$ sea perpendicular al vector $\vec{u}$. ¿Existe algún valor de k para el que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección?
- e) Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- f) Hallar un vector *unitario* y perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- g) Hallar el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$
- h) Hallar el valor de k para que el triángulo de vértices A , B y $C = (2, 3, k)$ tenga área 5.
- i) Hallar el volumen del paralelepípedo que determinan los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$.

SOLUCIONES

- a) $|\vec{u}| = \sqrt{14}$; $\vec{u} + \vec{v} = (6, 4, -4)$; $3\vec{u} = (6, -3, 9)$; $2\vec{u} + 5\vec{v} = (24, 23, -29)$;
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -18$; $\vec{u} \wedge \vec{v} = (-8, 26, 14)$; $A + B = (-1, 8, 6)$; $B + 5\vec{v} = (19, 31, -32)$;
 $2\vec{u} + \overrightarrow{AB} = (3, 2, 6)$
- b) $\frac{1}{3\sqrt{10}}(4, 5, -7)$
- c) $\frac{1}{\sqrt{14}}(-8, 4, -12)$
- d) $k = 4$; no.
- e) $\arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}\right) \approx 120,47^\circ$
- f) $\pm \frac{1}{3\sqrt{26}}(-4, 13, 7)$
- g) $\sqrt{202}$
- h) $k = 3 \pm \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{17}}$
- i) 112

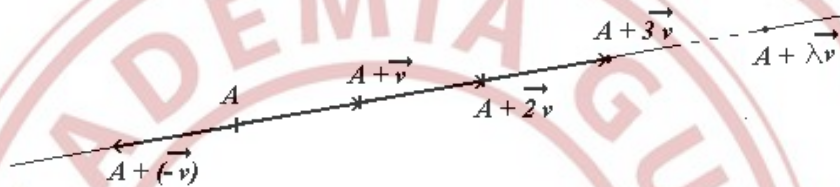
4.3. ECUACIÓN DE LA RECTA.

DEF: Sea $A = (a_1, a_2, a_3)$ un punto y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector distinto del $\vec{0}$. La RECTA QUE PASA POR A Y TIENE DIRECCIÓN (ó VECTOR DIRECTOR) $\vec{v}$, es el conjunto de infinitos puntos:

$$r = \left\{ Q \in A_3 / \exists \lambda \in \mathbf{R} / Q = A + \lambda \cdot \vec{v} \right\} \quad (1)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

La expresión $\lambda \cdot \vec{v}$, donde λ representa cualquier número, nos da todos los múltiplos de $\vec{v}$, que son una familia infinita de vectores que tienen la misma dirección. La suma de un punto más cada uno de esos vectores nos da los infinitos puntos de la recta



ECUACIÓN VECTORIAL.

Si en la fórmula (1) escribimos (x, y, z) para expresar las coordenadas del punto Q, tenemos:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3) \quad (2)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

Si en la fórmula (2) igualamos cada componente por separado:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 + \lambda v_1 \\ y &= a_2 + \lambda v_2 \\ z &= a_3 + \lambda v_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ECUACIÓN CONTINUA.

Si suponemos que $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, entonces podemos despejar λ en las tres ecuaciones de (2), e igualando:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \quad (4)$$

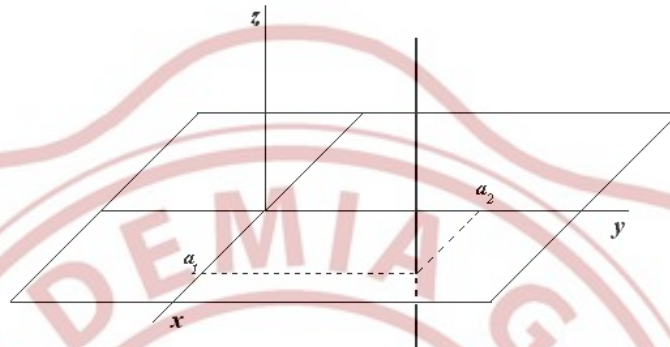
Si una de las componentes es 0, por ejemplo $v_1 = 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$, entonces la ecuación continua queda en dos partes:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 \\ \frac{y - a_2}{v_2} &= \frac{z - a_3}{v_3} \end{aligned} \right\}$$

Si son cero dos de las componentes, por ejemplo $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 \neq 0$, entonces, no podemos hablar de ecuación continua, pues las ecuaciones paramétricas serían:

$$\left. \begin{array}{l} x = a_1 \\ y = a_2 \\ (z \in \mathbf{R}) \end{array} \right\}$$

que corresponden a una recta paralela al eje Z.



ECUACIONES CARTESIANAS

Si en (4) tomamos dos de las igualdades, multiplicamos en cruz y agrupamos términos tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{array} \right\}$$

OBS: En todas las ecuaciones, excepto en las cartesianas, las coordenadas del punto A y las componentes del vector $\vec{v}$ están visibles y por lo tanto es muy sencillo pasar de unas a otras.

Para pasar de cartesianas a cualquiera de las otras formas, resolvemos el sistema (sistema compatible indeterminado) y tenemos las ecuaciones paramétricas.

EJERCICIOS. ECUACIONES DE LA RECTA.

1. Dar las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua y cartesianas de las rectas:

- Que pasa por el punto $A = (2, 3, 1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (5, 4, 7)$
- Que pasa por el punto $B = (2, 0, -3)$ y tiene vector director $\vec{u} = (-2, 3, 1)$
- Que pasa por el punto $C = (1, 5, 4)$ y tiene vector director $\vec{w} = (4, 0, -1)$
- Que pasa por el punto $D = (-3, 1, 0)$ y tiene vector director $\vec{j} = (0, 1, 0)$
- Que pasa por los puntos A y C
- Que pasa por los puntos A y B

2. Hallar un punto y el vector director de las rectas:

a) $r: \begin{cases} x = -3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$

c) $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$

d) $r: \begin{cases} 2x - y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$

e) $r: \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - 3y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$

f) $r: \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

g) $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

h) $r: \frac{2x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = z+3$

i) $r: \frac{3x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{1-z}{5}$

j) $r: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = -3x + 6 \end{cases}$

SOLUCIONES

1 a)

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (2, 3, 1) + \lambda(5, 4, 7)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = 1 + 7\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua: $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{7}$

Ecuaciones cartesianas:
$$\begin{cases} 4x - 5y = -7 \\ 7x - 5z = 9 \end{cases}$$

b)

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (2, 0, -3) + \lambda(-2, 3, 1)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

Ecuación continua: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = z + 3$

Ecuaciones cartesianas:
$$\begin{cases} x + 2z = -4 \\ y - 3z = 9 \end{cases}$$

c)

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, 5, 4) + \lambda(4, 0, -1)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 5 \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{z-4}{-1} \\ y = 5 \end{cases}$$

Ecuaciones cartesianas:
$$\begin{cases} x + 4z = 17 \\ y = 5 \end{cases}$$

d)

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (-3, 1, 0) + \lambda(0, 1, 0)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = -3 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Ecuación continua:
$$\begin{cases} x = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones cartesianas:
$$\begin{cases} x = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

e)

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (2, 3, 1) + \lambda(-1, 2, 3)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$

Ecuaciones cartesianas:
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + z = 7 \end{cases}$$

f)

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (2, 3, 1) + \lambda(0, 3, 4)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua:
$$\begin{cases} x = 2 \\ \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{4} \end{cases}$$

Ecuaciones cartesianas:
$$\begin{cases} x = 2 \\ 4y - 3z = 9 \end{cases}$$

2.a) $P = (0, 2, 1) \quad \vec{v} = (-3, 2, -1)$

c) $P = (2, 0, -2) \quad \vec{v} = (-1, 3, 1)$

e) $P = (-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 0) \quad \vec{v} = (-1, 1, 1)$

g) $P = (0, 4, 0) \quad \vec{v} = (0, 0, 1)$

i) $P = (\frac{7}{3}, -3, 1) \quad \vec{v} = (2, -2, -5)$

b) $P = (0, 1, 2) \quad \vec{v} = (2, 3, 4)$

d) $P = (4, 0, 4) \quad \vec{v} = (-3, 2, -4)$

f) $P = (0, 0, 0) \quad \vec{v} = (1, 0, -1)$

h) $P = (\frac{1}{2}, -5, -3) \quad \vec{v} = (1, -5, 1)$

j) $P = (0, 1, 6) \quad \vec{v} = (1, -2, -3)$

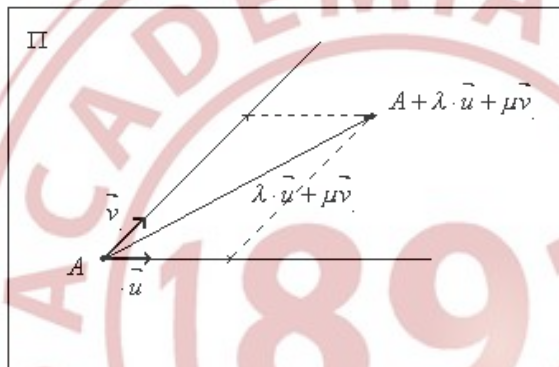
4.4. ECUACIÓN DEL PLANO.

DEF: Sea $A = (a_1, a_2, a_3)$ un punto, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores distintos del $\vec{0}$ y con $\text{dir}(\vec{u}) \neq \text{dir}(\vec{v})$ El PLANO QUE PASA POR A Y TIENE DIRECCIÓN $[u, v]$ es el conjunto de infinitos puntos:

$$\Pi = \left\{ Q \in A_3 / \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R} / Q = A + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \vec{v} \right\} \quad (1)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

La expresión $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, nos da todos los vectores que se pueden formar con múltiplos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (espacio generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$). La suma de un punto más cada uno de esos vectores nos da los infinitos puntos del plano.



ECUACIÓN VECTORIAL.

Si en la fórmula (1) escribimos (x, y, z) para expresar las coordenadas del punto Q, tenemos:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3) \quad (2)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

Si en la fórmula (2) igualamos cada componente por separado:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y &= a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z &= a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ECUACIÓN GENERAL.

Eliminando los parámetros λ y μ , es decir, despejando λ en una ecuación y sustituyendo en las otras, y haciendo lo mismo con μ , tenemos:

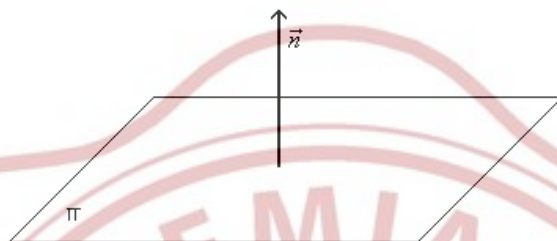
$$Ax + By + Cz = D \quad (4)$$

PROP: En la situación anterior, la ecuación general del plano la podemos obtener también haciendo:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & u_1 & v_1 \\ y-a_2 & u_2 & v_2 \\ z-a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

VECTOR NORMAL.

DEF: Decimos que un vector $\vec{n}$ es NORMAL a un plano si es perpendicular a dicho plano.



PROP: Si $Ax + By + Cz = D$ es la ecuación general de un plano Π , entonces $\vec{n}_{\Pi} = (A, B, C)$ es un vector normal a ese plano.

Análogamente, la ecuación del plano que pasa por el punto (a_1, a_2, a_3) y es perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es:

$$Ax + By + Cz = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3$$

EJEMPLO

Plano que pasa por el punto $A = (4, -1, 7)$ y tiene dirección $[(5, 3, 2); (1, 0, -2)]$

Podemos dar “directamente” la ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 5 & 1 \\ y+1 & 3 & 0 \\ z-7 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{por adjuntos}]{} -6(x-4) + 12(y+1) - 3(z-7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{simplificadndo por } (-3)]{} 2x - 8 - 4y - 4 + z - 7 = 0 \Leftrightarrow \text{Ecuación: } 2x - 4y + z = 19$$

Además tenemos el vector normal o perpendicular: $\vec{n} = (2, -3, 1)$

4.5. POSICIÓN RELATIVA.

a) RECTA-RECTA

Sean r y s dos rectas del espacio, expresadas en ecuaciones cartesianas:

$$r \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \quad s \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z = D_4 \end{cases}$$

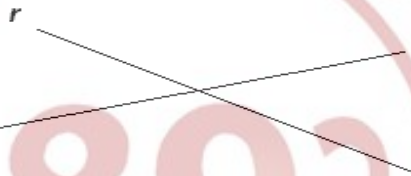
Planteamos el sistema de los puntos en común ⁽¹⁾ a r y s :

$$A_M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos (por el método de Gauss). Entonces:

- Si el sistema es **Compatible Indeterminado**, r y s tienen **infinitos puntos en común**, y las dos rectas son iguales.

- Si el sistema es **Compatible Determinado**, r y s tienen **un único punto en común**, y las dos rectas se cortan en un punto:

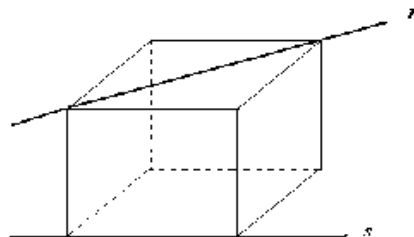


- Si el sistema es **Incompatible**, r y s **no tienen puntos en común**. Hay dos posibilidades:

a) $A_M \equiv \begin{pmatrix} \square & * & * & * \\ 0 & \square & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Que son dos rectas paralelas:



b) $A_M \equiv \begin{pmatrix} \square & * & * & * \\ 0 & \square & * & * \\ 0 & 0 & \square & * \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{pmatrix}$ Que son dos rectas que se cruzan



Observación: Si las rectas están en cualquiera de las otras formas (vectorial, paramétricas o continua), es fácil obtener un punto de cada una de ellas: P_r y Q_s , y sus vectores directores: v_r y v_s respectivos.

Entonces podemos estudiar la posición relativa así:

- Si v_r y v_s tienen la misma dirección (son proporcionales):
 - P_r está en s , entonces $r = s$.
 - P_r no está en s , entonces r y s son paralelas.
- Si v_r y v_s no tienen la misma dirección (no son proporcionales):
 - $\text{Det}(P_r Q_s, v_r, v_s) = 0$, entonces r y s se cortan en un punto.
 - $\text{Det}(P_r Q_s, v_r, v_s) \neq 0$, entonces r y s se cruzan.

b) RECTA-PLANO

Sea r una recta de ecuaciones cartesianas:

$$r \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2 \end{cases}$$

Π un plano de ecuación general:

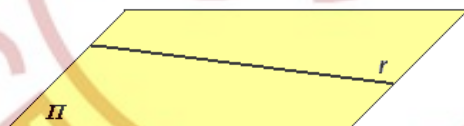
$$\Pi : A_3 x + B_3 y + C_3 z = D_3$$

Planteamos el sistema de los puntos en común a r y Π :

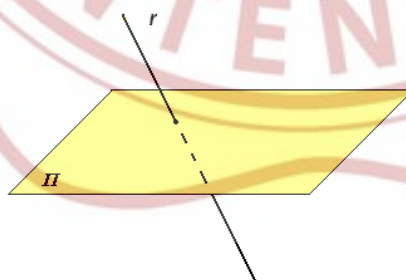
$$A_M = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array} \right)$$

Resolvemos (por el método de Gauss). Entonces:

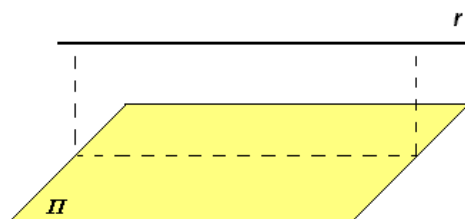
- Si el sistema es **Compatible Indeterminado**, r y Π tienen **infinitos puntos en común**, r está contenida en Π .



- Si el sistema es **Compatible Determinado**, r y Π tienen **un único punto en común**, y se cortan en un punto:



- Si el sistema es **Incompatible**, r y s **no tienen puntos en común**. r es paralela a Π .



Observación:

Si $\mathbf{v}_r$ es el vector director de la recta r , $\mathbf{P}_r$ un punto de ella y $\mathbf{n}_\pi$ es el vector normal al plano π Entonces:

- Si $\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{n}_\pi$ son perpendiculares, es decir: $\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_\pi = 0$:
 - $\mathbf{P}_r$ está en π , entonces r contenida en π .
 - $\mathbf{P}_r$ no está en π , entonces r es paralela a π .
- Si $\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{n}_\pi$ no son perpendiculares, es decir: $\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}_\pi \neq 0$:
 - r y π se cortan en un punto.

c) PLANO-PLANO.

Sean $\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ y $\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ las ecuaciones generales de dos planos, entonces:

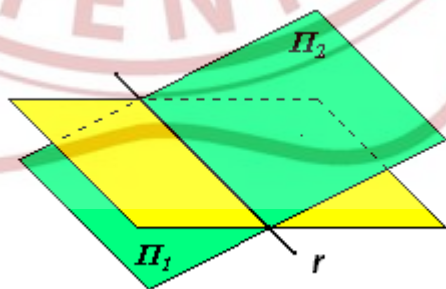
- Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ ⁽²⁾, entonces $\Pi_1 = \Pi_2$
- Si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ ⁽³⁾, entonces Π_1 y Π_2 son paralelos



- Si no se cumple ninguna de las dos condiciones anteriores, Π_1 y Π_2 se cortan en una recta r . En este caso, las ecuaciones cartesianas de la recta r son:

$$r \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

Es decir, juntar las ecuaciones de Π_1 y Π_2 .



(1) Cuando unimos las ecuaciones de dos o más elementos (rectas y/o planos) en un sistema, las soluciones del sistema de ecuaciones son los puntos que están simultáneamente en todos esos elementos.

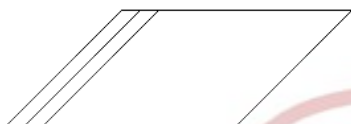
(2) Se entiende que si alguno de los denominadores es 0, el correspondiente numerador también tiene que ser 0.

(3) Igual que en el anterior excepto si D_2 es 0, en cuyo caso no es necesario que el numerador sea también 0 para que sean paralelos.

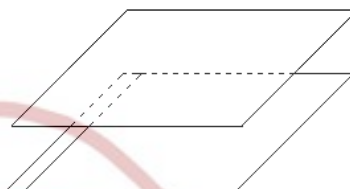
TRES PLANOS

Para estudiar más de dos elementos, en general, se estudian dos a dos. Sin embargo, haremos una excepción con el caso de los tres planos, pues nos sirve para interpretar geoméricamente los sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

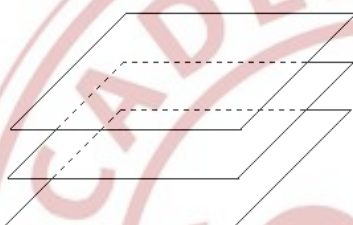
3 Planos iguales:
Rango $A = \text{Rango } A_m = 1$



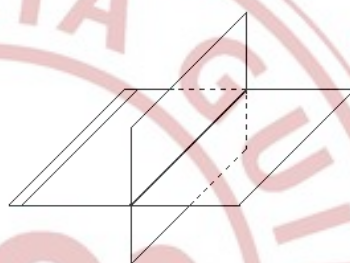
2 planos iguales y el otro paralelo:
Rango $A = 1$, Rango $A_m = 2$



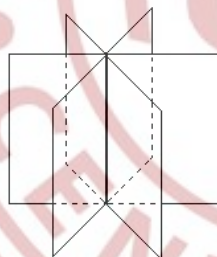
3 Planos paralelos:
Rango $A = 1$, Rango $A_m = 2$.



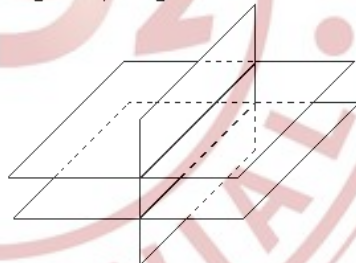
2 Planos iguales y el otro lo corta:
Rango $A = \text{Rango } A_m = 2$.



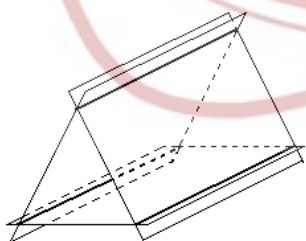
3 Planos se cortan en una recta:
Rango $A = \text{Rango } A_m = 2$.



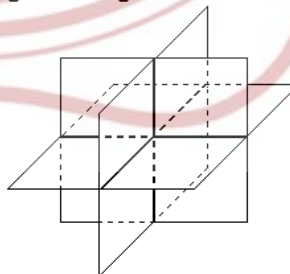
2 Planos paralelos y el otro los corta:
Rango $A = 2$, Rango $A_m = 3$.



Los 3 planos se cortan 2 a 2:
Rango $A = 2$, Rango $A_m = 3$.



Los 3 Planos se cortan en un punto:
Rango $A = \text{Rango } A_m = 3$.



Nota; Observa que si descartamos planos iguales y paralelos solo quedan tres casos :

S.C.D.: Los tres planos se cortan en un punto. *"La esquina"*

S.C.I.: Los tres planos se cortan en una recta *"La puerta giratoria"*

S.I. : Los planos se cortan dos a dos. *"La tienda de campaña"*.

4.6 Ángulos.

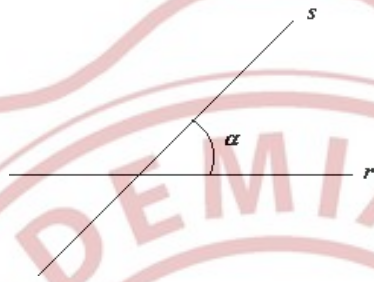
a) RECTA-RECTA

Sean r y s dos rectas del espacio, v_r y v_s sus vectores directores respectivos y. Entonces:

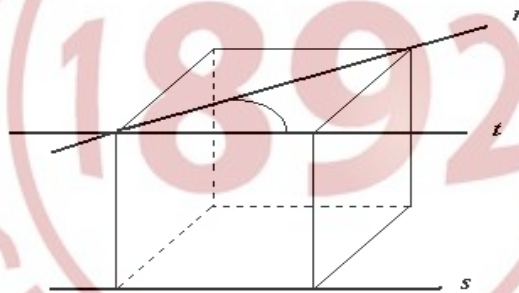
$$\cos \alpha = \frac{|v_r \cdot v_s|}{|v_r| \cdot |v_s|}$$

Observaciones

1. Se considera el ángulo por el camino más corto.



2. No es necesario que las rectas se corten. Si r y s se cruzan, entonces el ángulo entre r y s es el ángulo entre r y cualquier paralela a s (t) que corte con s .



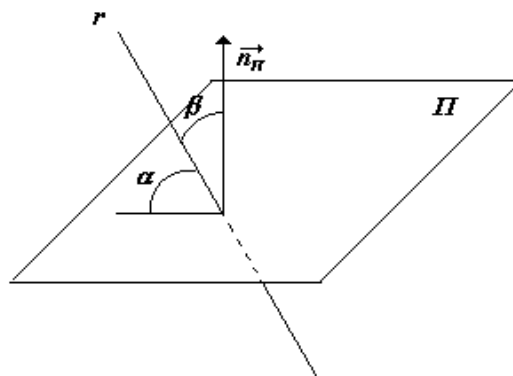
b) RECTA-PLANO

Si v_r es el vector director de la recta r , n_{Π} es el vector normal al plano Π y α es el ángulo que forman r y Π , entonces:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{|v_r \cdot n_{\Pi}|}{|v_r| \cdot |n_{\Pi}|}$$

Observación.

En esta fórmula aparece el $\sin \alpha$, pues estamos buscando el complementario del ángulo β que forman v_r y n_{Π} .



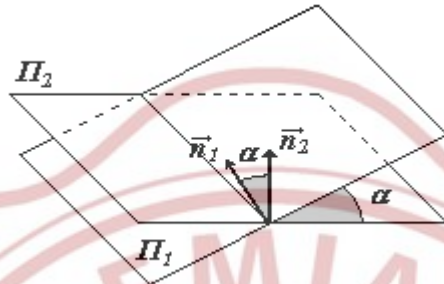
c) PLANO-PLANO.

Sean $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ los vectores normales a los planos Π_1 y Π_2 respectivamente y α el ángulo que forman dichos planos. Entonces:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Observación.

El ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus perpendiculares.



4.7 Distancias.

a) PUNTO-PUNTO.

$$DIST(A, B) = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

b) PUNTO-RECTA.

Sea P un punto y r una recta. Si Q es un punto cualquiera de r y $\vec{v}_r$ su vector director, entonces:

$$DIST(P, r) = \frac{|\vec{PQ} \wedge \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

Observación:

La distancia de un punto a una recta se considera como la distancia mínima de dicho punto a los puntos de la recta. Este mismo criterio lo seguimos en las fórmulas sucesivas.

c) PUNTO-PLANO.

Sea P un punto y Π un plano.

Sí $P = (p_1, p_2, p_3)$ y la ecuación general de Π es $Ax + By + Cz + D = 0$, entonces:

$$DIST(P, \Pi) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C \cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

d) RECTA-RECTA.

El cálculo de la distancia entre dos rectas depende de la posición relativa entre ellas.

- Si $r = s$, o r y s se cortan en un punto, entonces: $DIST(r, s) = 0$.

- Si r es paralela a s , y P es un punto de r , entonces $DIST(r, s) = DIST(P, s)$, y hay que utilizar la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

- Si r y s se cruzan, P es un punto de r , Q un punto de s y v_r y v_s los vectores directores respectivos, entonces:

$$DIST(r, s) = \frac{|Det(PQ, v_r, v_s)|}{|v_r \wedge v_s|}$$

Observación:

En la práctica, basta ver si los vectores directores tienen la misma dirección o no.

Sí la tienen actuamos como en el caso de rectas paralelas; si las rectas son la misma, la distancia nos dará 0.

Sí no la tiene actuamos como en el caso en que se cruzan; sí las rectas se cortan, el determinante del numerador de la fórmula será 0, y ya no hace falta calcular el denominador.

e) RECTA-PLANO.

- Si r contenida en Π ó se cortan en un punto, entonces la distancia es 0.

- Si r es paralela a Π , hallamos un punto de r y usamos la fórmula de la distancia PUNTO-PLANO.

f) PLANO -PLANO.

- Si $\Pi_1 = \Pi_2$ ó se cortan en una recta, entonces la distancia es 0.

- Si Π_1 es paralelo a Π_2 , hallamos un punto de Π_1 y usamos la fórmula de la distancia PUNTO-PLANO.



5.FUNCIONES.

5.1 Conjuntos numéricos



Números Naturales: Son los números más simples de los que hacemos uso, se denotan por $\mathbb{N}$ y están formados por los números 0,1,2,3,4,5...

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

Números Enteros: la insuficiencia de los números naturales para contar deudas o temperaturas por debajo de cero lleva directamente a los números enteros. Se denotan por $\mathbb{Z}$ y están formados por los números naturales, sus inversos aditivos y el cero. El conjunto de los números enteros incluye a los naturales, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, \dots \}.$$

Operaciones en $\mathbb{Z}$

Suma y resta

Vamos a recordar con algunos ejemplos como se suma y se resta en el conjunto de los números enteros:

$$\begin{array}{l}
 8 + (-5) = 3 \\
 6 - (-4) = 10 \\
 -5 + (-3) = -8 \\
 -10 - (-3) = -7
 \end{array}$$

Producto y cociente

Al multiplicar y dividir números enteros hay que recordar que ocurre con los signos:

- + operado con + = +
- + operado con - = -
- operado con + = -
- operado con - = +

Estos criterios se seguirán conservando al pasar a trabajar con números de los conjuntos superiores.

Números Racionales: la insuficiencia de los números enteros para denominar partes de unidad lleva directamente a los números racionales. Se denotan por $\mathbb{Q}$ y son todos aquellos que se pueden expresar como cociente de dos enteros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Expresión decimal en $\mathbb{Q}$

Para pasar de fracción a decimal basta con hacer la división del numerador entre el denominador. Pueden darse los siguientes casos, según sea la expresión decimal resultante:

El número es un entero. Si el numerador es un múltiplo del denominador.

Por ejemplo: $\frac{52}{13} = 4$

Expresión decimal exacta: Si tiene un número finito de decimales.

Por ejemplo: $\frac{7}{8} = 0,675$

Expresión decimal periódica pura: Si tiene un número infinito de decimales que se repiten. La parte que se repite se llama **periodo**.

Por ejemplo: $\frac{6}{11} = 0.545454 \dots = 0, \overline{54}$. El periodo es 54.

Expresión decimal periódica mixta: Si tiene un número infinito de decimales que se repiten a partir de una cierta posición decimal. La parte que se repite se llama **periodo** y la parte decimal previa al periodo se llama **anteperiodo**.

Por ejemplo: $\frac{4}{15} = 0,26666 \dots = 0,2\overline{6}$. El periodo es 6 y el anteperiodo 2.

Recíprocamente, todo número con un desarrollo decimal, de los tipos anteriores, puede expresarse como fracción.

Operaciones en $\mathbb{Q}$

Suma y resta de fracciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Producto y cociente

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Números Irracionales: Se denotan por $\mathbb{I}$ y son el conjunto de los números con infinitos decimales, no periódicos. Estos números no se pueden escribir exactos usando decimales, por lo que se utiliza alguna letra o símbolo de operación para expresarlos. Cuando queremos usar estos números en “la vida real” tomamos tantos decimales como necesitemos. Los más famosos son:

El número pi: $\pi \cong 3,1415926 \dots$

El número e: $e \cong 2,71828 \dots$

Las raíces no exactas, por ejemplo. $\sqrt{2} \cong 1,4142 \dots$

Números Reales: Es la unión entre el conjunto de los números racionales y los irracionales

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Este es el conjunto de números que usaremos habitualmente en este curso.

Números Complejos: Se denotan por $\mathbb{C}$. Definimos el número i para poder trabajar con raíces de números negativos: $i = \sqrt{-1}$. Todos los números complejos tienen la forma (forma binómica):

$z = a + bi$, donde a y b son números reales.

Suma :

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Producto:

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi + bidi = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

Cociente:

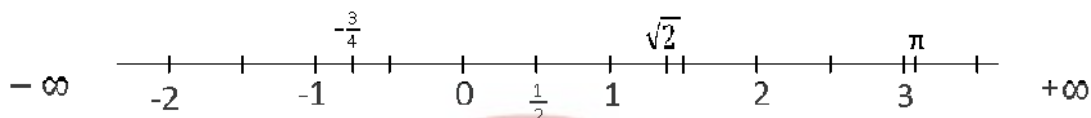
$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Tenemos otra forma de representar y operar con los números complejos (forma polar), interpretándolos como vectores.

5.2 Números Reales

Representación gráfica.

“Dibujamos una recta, elegimos un punto origen, y una unidad. Entonces, para cada punto de la recta existe un número real y viceversa.”



Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Intervalos y semirrectas.

Un intervalo es un subconjunto de la recta, comprendido entre dos puntos fijos llamados extremos.

Ejemplo de Intervalo: $I = [a, b]$, donde a es el extremo inferior del intervalo y b es el extremo superior del mismo, además $a < b$

Tipos de Intervalos

cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	
abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	
semiabierto o semicerrado	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	
semiabierto o semicerrado	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	
semirrecta cerrada	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	
semirrecta abierta	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	
semirrecta cerrada	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	
semirrecta abierta	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	
recta real	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	

Puntos aislados.

En ocasiones queremos referirnos a uno o varios puntos aislados. Usamos un símbolo de llave:

Por ejemplo:

$\{a, b, c\}$



5.3 Polinomios.

Definición: Un Polinomio de grado n es una expresión del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, (son números) que llamamos coeficientes, $a_n \neq 0$ y x es una letra (que representa números desconocidos) que llamamos incógnita o variable.

Ejemplo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ es un polinomio de grado 3.

Operaciones con polinomios.

Suma/resta.

Para sumar(restar) polinomios, sumamos(restamos) entre sí aquellos monomios que tengan la misma potencia.

Por ejemplo, consideremos los polinomios

$$P(x) = 3x^5 + 2x^3 - 5x^2 + 6 \text{ y } Q(x) = 8x^3 + 3x^2 - x - 4$$

$$\text{El polinomio resultante de la suma } P(x) + Q(x) = 3x^5 + 10x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Fíjate, aquellos monomios cuya potencia aparece solo en un polinomio, los hemos copiado y hemos sumado aquellos monomios que tenían el mismo grado:

$$2x^3 + 8x^3 = 10x^3$$

$$-5x^2 + 3x^2 = -2x^2$$

$$6 - 4 = 2$$

Producto:

Para multiplicar dos monomios, multiplicamos los coeficientes y sumamos las potencias de x :

$$\text{Ejemplo: } 5x^4 \cdot 4x^3 = 20x^7$$

Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos cada monomio del primer polinomio por cada polinomio del segundo. Luego sumamos aquellos monomios con el mismo grado.

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$$

$$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$$

Se suman los monomios del mismo grado.

$$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

División:

Veamos la división de polinomios con un ejemplo:

Sean:

$$P(x) = 2x^5 + 2x^3 - x - 8 \quad Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Vamos a calcular: $P(x) : Q(x)$

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio no es completo dejamos huecos en los lugares que correspondan.

$$\begin{array}{r} x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 \end{array} \bigg| x^2 - 2x + 1$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. $x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividido:

$$\begin{array}{r} x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 \\ -x^5 + 2x^4 - x^3 \\ \hline 2x^4 + \quad x^3 \qquad - x - 8 \end{array} \bigg| x^2 - 2x + 1$$

Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo. $2x^4 : x^2 = 2x^2$

$$\begin{array}{r} x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 \\ -x^5 + 2x^4 - x^3 \\ \hline 2x^4 + \quad x^3 \qquad - x - 8 \\ -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\ \hline 5x^3 - 2x^2 - x - 8 \end{array} \bigg| x^2 - 2x + 1$$

Procedemos igual que antes. $5x^3 : x^2 = 5x$

$$\begin{array}{r} x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 \\ -x^5 + 2x^4 - x^3 \\ \hline 2x^4 + \quad x^3 \qquad - x - 8 \\ -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\ \hline 5x^3 - 2x^2 - x - 8 \\ -5x^3 + 10x^2 - 5x \\ \hline 8x^2 - 6x - 8 \end{array} \bigg| x^2 - 2x + 1$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones. $8x^2 : x^2 = 8$

$$\begin{array}{r} x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 \\ -x^5 + 2x^4 - x^3 \\ \hline 2x^4 + \quad x^3 \qquad - x - 8 \\ -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\ \hline 5x^3 - 2x^2 - x \\ -5x^3 + 10x^2 - 5x \\ \hline 8x^2 - 6x - 8 \\ -8x^2 + 16x - 8 \\ \hline 10x - 16 \end{array} \bigg| x^2 - 2x + 1$$

Cociente: $x^3 + 2x^2 + 5x + 8$.

Resto: $10x - 16$

EJERCICIOS.**1. Calcular y simplificar:**

- a) $(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) \cdot$ (sol: $6x^4 - 2x^3$)
- b) $(x+1)^2(3x^2+2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)$ (sol: $x^4 + 8x^3 + x^2 + 4x + 4$)
- c) $(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2)$ (sol: $-2x^3 + 4x^2 - 5x + 11$)

2.- Halla el cociente y el resto de cada división:

- a) $(-2x^4 + 3x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 2x + 2)$
- b) $(-x^4 + 2x^2 - x + 2) : (x + 2)$
- c) $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 + 2)$
- d) $(-3x^4 + 6x^2 + x - 2) : (x - 1)$
- e) $(2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1) : (x^3 - 2x + 1)$
- f) $(2x^5 - 3x^3 + 2x - 1) : (x + 2)$

soluciones:

- a) Cociente = $-2x^2 - x + 2$
Resto = $4x - 1$
- b) Cociente = $-x^3 + 2x^2 - 2x + 3$
Resto = -4
- c) Cociente = $2x^2 - 7x - 1$
Resto = $14x + 1$
- d) Cociente = $-3x^3 - 3x^2 + 3x + 4$
Resto = 2
- e) Cociente = $2x^2 - 3x + 4$
Resto = $-6x^2 + 10x - 3$
- f) Cociente = $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 22$
Resto = -45

Ecuaciones polinómicas. Descomposición en factores.Ecuaciones de primer grado con una incógnita

En estas ecuaciones hay una sola incógnita y su potencia es siempre la unidad. Los pasos a seguir para su resolución se muestran en los siguientes ejemplos:

- Ejemplo 1:

$$2x+5-8x+4-3=3x-5+4x-2$$

Se colocan en un miembro de la ecuación todos los términos que contienen la incógnita y en el otro miembro todos los números:

$$2x-8x-3x-4x=-5-4+3-5-2$$

Se realizan las sumas y restas en cada miembro:

$$-13x=-13$$

Siempre que la incógnita nos quede negativa, se multiplicará toda la ecuación por -1 (lo que equivale a cambiar los signos en los dos miembros):

$$13x=13$$

Se divide por el número que multiplica a la incógnita toda la ecuación, consiguiéndose así la incógnita despejada:

$$x=\frac{13}{13}=1$$

-Ejemplo 2:

$$8(x-1)-5(x-2)=-2(x-4)+7x$$

En este caso se deben deshacer los paréntesis y nos encontraremos con una situación similar a la del ejemplo 1:

$$8x - 8 - 5x + 10 = -2x + 8 + 7x$$

$$8x - 5x + 2x - 7x = 8 - 10 + 8$$

$$-2x = 6 ; 2x = -6 ; x = -\frac{6}{2} = -3$$

-Ejemplo 3:

$$\frac{2x+1}{5} - \frac{3x+2}{2} = 5x - \frac{4x-3}{10}$$

En este caso debemos buscar el m.c.m de los denominadores (10 en este caso) y transformar cada fracción:

$$\frac{2(2x+1)}{10} - \frac{5(3x+2)}{10} = \frac{10 \cdot 5x}{10} - \frac{4x-3}{10}$$

Se multiplica toda la ecuación por el m. c. m, con lo que se eliminan todos los denominadores

$$2(2x+1) - 5(3x+2) = 50x - 4x + 3$$

$$4x + 2 - 15x - 10 = 50x - 4x + 3$$

$$4x - 15x - 50x + 4x = -2 + 10 + 3$$

$$-57x = 11 ; 57x = -11 ; x = -\frac{11}{57}$$

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Son ecuaciones en las que la incógnita se encuentra elevada al cuadrado.

Tienen la forma: $ax^2 + bx + c = 0$. A los números a, b y c se les llama coeficientes de la ecuación.

Para resolver este tipo de ecuaciones se debe aplicar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se llama discriminante de la ecuación a: $d = b^2 - 4ac$. Dependiendo del signo del discriminante nos podemos encontrar con los siguientes casos:

- * Si $d > 0$ la ecuación tendrá dos soluciones reales.
- * Si $d = 0$ la ecuación tiene una solución real doble.
- * Si $d < 0$ la ecuación no tiene solución en los números reales (aunque tendrá dos soluciones complejas).

Descomposición en factores según las soluciones de la ecuación.

Soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$	Descomposición de $P(x) = ax^2 + bx + c$
Dos soluciones α_1 y α_2	$P(x) = a(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$
Una solución doble α_1	$P(x) = a(x - \alpha_1)^2$
Sin soluciones reales	No se puede descomponer

Ejemplos:**-Ejemplo 1:**

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{4} = 1 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Descomposición: $2x^2 - x - 1 = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + \frac{1}{2})$ **-Ejemplo 2:**

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Descomposición: $4x^2 + 4x + 1 = 4 \cdot (x + \frac{1}{2})^2$ **-Ejemplo 3:**

$$4x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{8} \Rightarrow \text{no tiene solución en los números reales.}$$

No se puede descomponer en factores.

Ecuaciones de grado mayor que 2. Método de Ruffini.

Aunque existen fórmulas para la resolución de ecuaciones de 3º y 4º grado, su complejidad es tal que no se suelen utilizar en la práctica.

Nos conformaremos con buscar las soluciones que sean números enteros.

Método de Ruffini.

Es un método para hallar por tanteo las soluciones enteras de ecuaciones de grado mayor o igual a 3.

Está basado en la propiedad:

“si un número entero es solución de una ecuación polinómica, entonces es un divisor del término independiente”

Esta propiedad limita las posibles soluciones, y hace factible el método.

Veamos como es con un ejemplo:

Ejemplo: Factorizar $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

Se aplica la regla de Ruffini, probando los divisores del término independiente, en este caso de 12. O sea que se prueba con 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 y -12

Probemos con 1:

Se copian los coeficientes del polinomio:

	1	-4	-1	16	-12
Y se escribe en una segunda línea el número uno					
1	1	-4	-1	16	-12

El primer coeficiente se copia abajo en una tercera línea

	1	-4	-1	16	-12
1					
	1				

Se multiplica ese coeficiente, uno (1), por el número que estamos probando, en este caso también uno (1), o sea uno por uno = uno (1). Este uno se escribe debajo del siguiente coeficiente, o sea del -4

	1	-4	-1	16	-12
1		1			
	1				

Se suma $-4+1=-3$

	1	-4	-1	16	-12
1		1			
	1	-3			

Se multiplica -3 por $1=-3$ y se escribe debajo del siguiente coeficiente, -1

	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3		
	1	-3			

Se suma $-3-1=-4$ y así sucesivamente

	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	0

Como vemos la última suma ha dado cero. Eso quiere decir que 1 es una raíz del polinomio y que nos sirve para factorizar.

Si hubiera dado distinto de cero habría que seguir probando los demás divisores de 12.

Los coeficientes que han quedado en la última fila, en realidad son los coeficientes del cociente de dividir el polinomio entre $(x - 1)$.

Por lo tanto

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x-1)(x^3 - 3x^2 - 4x + 12)$$

De hecho ya hemos factorizado el polinomio, pero el segundo factor de tercer grado hay que intentar seguir factorizando, de nuevo por la regla de Ruffini.

Aplicando sucesivas veces esta regla queda:

	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	0
2		2	-2	-12	
	1	-1	-6	0	
-2		-2	6		
	1	-3	0		

Como las raíces son, 1, 2 y -2 y el último cociente es $x-3$
La factorización final es:

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = (x-1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

Si en las sucesivas pruebas no encontramos ningún resto cero, quiere decir que el polinomio no se puede factorizar dentro de los números enteros, pero si hemos llegado hasta un factor de 2º grado, lo podríamos terminar por la fórmula de la ecuación de 2ª grado.



EJERCICIOS.ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

Resolver las siguientes ecuaciones:

- | | | | |
|---|-------------------------|---------------------------|-----------------|
| 01.- $4x-1=7$ | (Sol. $x=2$) | 02.- $2-5x=12$ | (Sol. $x=-2$) |
| 03.- $4-3x=4$ | (Sol. $x=0$) | 04.- $11=5+4x$ | (Sol. $x=3/2$) |
| 05.- $21-7x=0$ | (Sol. $x=3$) | 06.- $13x-5-6x=9$ | (Sol. $x=2$) |
| 07.- $6-x=3-4x$ | (Sol. $x=-1$) | 08.- $2x-5+x=1+3x-6$ | (Sol. $x=2$) |
| 09.- $1-8x+5=11-3x$ | (Sol. $x=-1$) | 10.- $7x+2x=2x+1+6x$ | (Sol. $x=1$) |
| 11.- $2x+8-9x=7+2x-2$ | (Sol. $x=1/3$) | 12.- $10-15x+2=10x+5-11x$ | (Sol. $x=1/2$) |
| 13.- $3-(1-6x)=2+4x$ | (Sol. $x=0$) | 14.- $3(x-1)-4x=5-(x+7)$ | (Sol. No tiene) |
| 15.- $2x-2(x-1)+5=4-3(x+1)$ | (Sol. $x=-2$) | | |
| 16.- $5(2x-3)-8x=14x-3(4x+5)$ | (Sol. Es una identidad) | | |
| 17.- $3(x-2)-5(2x-1)-2(3x+4)+10=0$ | (Sol. $x=1/13$) | | |
| 18.- $5x-2(3x-4)=25-3(5x+1)$ | (Sol. $x=1$) | | |
| 19.- $3(4x-1)-2(5x-3)=11-2x$ | (Sol. $x=2$) | | |
| 20.- $5-\frac{x}{2}=3x-16$ | (Sol. $x=6$) | | |
| 21.- $x-\frac{x}{3}=2x-\frac{2}{3}$ | (Sol. $x=1/2$) | | |
| 22.- $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}=\frac{4}{3}$ | (Sol. $x=4$) | | |
| 23.- $\frac{x}{5}-\frac{x}{8}=\frac{3}{4}$ | (Sol. $x=10$) | | |
| 24.- $x-\frac{1}{2}=\frac{5x}{8}-\frac{3}{4}$ | (Sol. $x=-2/3$) | | |

$$25.- \frac{x}{2} + \frac{1}{5} - \frac{x}{6} = \frac{3x}{10} + \frac{8}{15}$$

(Sol. $x=10$)

$$26.- \frac{x}{3} - \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

(Sol. *Es una identidad*)

$$27.- \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{2x}{15} + 7$$

(Sol. $x=1$)

$$28.- \frac{x}{2} + \frac{x-2}{4} = 1$$

(Sol. $x=2$)

$$29.- x - \frac{x-5}{2} = 4$$

(Sol. $x=2$)

$$30.- \frac{x-7}{4} + \frac{x-1}{3} = x-5$$

(Sol. $x=7$)

$$31.- 3 - \frac{2x}{5} = x - \frac{3x-1}{2}$$

(Sol. $x=-25$)

$$32.- \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$$

(Sol. $x=11$)

$$33.- \frac{x-1}{5} - \frac{1-x}{6} = \frac{x-1}{4}$$

(Sol. $x=1$)

$$34.- \frac{3x-2}{5} - \frac{2x-1}{3} = \frac{5x-7}{15}$$

(Sol. $x=1$)

$$35.- 1 - \frac{x-2}{3} = x$$

(Sol. $x=5/3$)

$$36.- \frac{x}{3} - \frac{x+2}{9} = \frac{x}{3}$$

(Sol. $x=-2$)

$$37.- 5x = 6-3x$$

(Sol. $x=3/4$)

$$38.- 4-2x = 6x$$

(Sol. $x=1/2$)

$$39.- 2x-15 = -3x$$

(Sol. $x=3$)

$$40.- 3x = 4x-13$$

(Sol. $x=13$)

$$41.- 12+3x = 5x$$

(Sol. $x=6$)

$$42.- 14-3x = 4x$$

(Sol. $x=2$)

$$43.- 18-3x = -x$$

(Sol. $x=9$)

$$44.- -16-6x = -2x$$

(Sol. $x=-4$)

$$45.- 4x-12 = 6x+8$$

(Sol. $x=-10$)

$$46.- 2x-7 = 3x-8$$

(Sol. $x=1$)

$$47.- 5x+12 = 2x-21 \quad (\text{Sol. } x=-11)$$

$$48.- 6x-4 = 3x+2 \quad (\text{Sol. } x=2)$$

$$49.- 7-3x = 6x-20 \quad (\text{Sol. } x=3)$$

$$50.- 10+2x = 6x+2 \quad (\text{Sol. } x=2)$$

$$51.- 3(x-6) = 2(x-4) \quad (\text{Sol. } x=10)$$

$$52.- 7(x-18) = 3(x-14) \quad (\text{Sol. } x=21)$$

$$53.- x+2(3x-1) = 3(x-2) \quad (\text{Sol. } x=-1)$$

$$54.- 12-(x-4) = 6+x \quad (\text{Sol. } x=5)$$

$$55.- 4-(2x-1) = 3(2-x)-10 \quad (\text{Sol. } x=-9)$$

$$56.- 5-2(2x-3) = 4(x-1) \quad (\text{Sol. } x=15/8)$$

$$57.- 3(x+1)-5 = 2x+1 \quad (\text{Sol. } x=3)$$

$$58.- 2(x+1)-3(x-2) = x+6 \quad (\text{Sol. } x=1)$$

$$59.- 4(x-3)-7(x-4) = 6-x \quad (\text{Sol. } x=5)$$

$$60.- \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15 \quad (\text{Sol. } x=36)$$

$$61.- \frac{x}{15} + x = \frac{2x}{5} + 10 \quad (\text{Sol. } x=15)$$

$$62.- \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4} \quad (\text{Sol. } x=2)$$

$$63.- \frac{x}{2} - \frac{2}{5} = \frac{x}{5} - \frac{1}{2} \quad (\text{Sol. } x=-1/3)$$

$$64.- \frac{4x}{3} - \frac{5x}{9} = 2 + \frac{x}{3} \quad (\text{Sol. } x=9/2)$$

$$65.- x + \frac{1}{6} = \frac{2x}{3} - \frac{1}{2} \quad (\text{Sol. } x=-2)$$

$$66.- \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{11}{6} \quad (\text{Sol. } x=5)$$

$$67.- x - \frac{3x}{4} + \frac{1}{10} = \frac{4x}{5} - \frac{x}{2} \quad (\text{Sol. } x=2)$$

68.- $\frac{x}{3} - 2 = \frac{x}{5} - 1$ (Sol. $x = 15/2$)

69.- $\frac{x-3}{2} + \frac{2x-1}{6} = 4$ (Sol. $x = 34/5$)

70.- $\frac{x+1}{6} - \frac{x+3}{4} = -1$ (Sol. $x = -5$)

71.- $\frac{x-2}{4} + \frac{3x-1}{8} = 4$ (Sol. $x = 37/5$)

72.- $\frac{x-2}{6} - \frac{x+1}{3} - \frac{x+3}{5} = \frac{5}{2}$ (Sol. $x = -113/11$)

73.- $\frac{x+1}{8} - \frac{x-1}{6} - \frac{x+3}{5} = -2$ (Sol. $x = 203/29$)

74.- $\frac{x+6}{10} = 10 - \frac{3-3x}{2}$ (Sol. $x = -79/14$)

75.- $x-1 - \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} = 0$ (Sol. $x = 6/5$)

76.- $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{9} = x-4 + \frac{x-5}{9}$ (Sol. $x = 6$)

77.- $\frac{x}{10} + \frac{x+1}{5} = \frac{x}{6}$ (Sol. $x = 6$)

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

01.- $4x^2 + 8x + 3 = 0$

02.- $x^2 + 4x + 3 = 0$

03.- $2x^2 - 5x - 3 = 0$

04.- $3x^2 + 4x + 1 = 0$

05.- $x^2 - x - 2 = 0$

06.- $2x^2 - 7x - 4 = 0$

07.- $x^2 - 5x = 0$

08.- $x^2 - 25 = 0$

09.- $x^2 - 2x - 8 = 0$

10.- $x^2 + 6x + 15 = 0$

11.- $x^2 - 6x + 9 = 0$

12.- $4x^2 + 11x - 3 = 0$

13.- $2x^2 - 3x + 1 = 0$

14.- $x^2 + 3x = 0$

15.- $x^2 - 49 = 0$

16.- $x^2 - 13x + 42 = 0$

17.- $x^2 + 4x + 8 = 0$

18.- $2x^2 - 7x - 15 = 0$

19.- $x^2 + 4x + 4 = 0$

20.- $2x^2 - 11x + 5 = 0$

21.- $6x^2 - x - 1 = 0$

22.- $3x^2 = (x+2)(x+4)$

23.- $5x - \frac{x^2}{3} = 3x$

24.- $(3x-1)(1-2x) = (3-x)(x-2)$

25.- $2x^2 + \frac{x}{2} - \frac{4x}{3} = 3x + \frac{1}{3}$

26.- $x^2 - \frac{x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$

27.- $(5x-5)(x-1) = (2x+1)(x+1)$

28.- $\frac{5x^2}{3} = \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{4}$

29.- $4x - (x-2)(x+2) = 2(x-2)$

30.- $\frac{2x^2-1}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{1-x}{6}$

31.- $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x-5}{6} = \frac{2x+2}{3}$

SOLUCINES

01.- $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$

02.- $x_1 = -1, x_2 = -3$

03.- $x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{2}$

04.- $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$

05.- $x_1 = 2, x_2 = -1$

06.- $x_1 = 4, x_2 = -\frac{1}{2}$

07.- $x_1 = 0, x_2 = 5$

08.- $x_1 = 5, x_2 = -5$

09.- $x_1 = 4, x_2 = -2$

10.- *No tiene*

11.- $x = 3$, *doble*

12.- $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = -3$

13.- $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$

14.- $x_1 = 0, x_2 = -3$

15.- $x_1 = 7, x_2 = -7$

16.- $x_1 = 6, x_2 = 7$

17.- *No tiene*

18.- $x_1 = 5, x_2 = -\frac{3}{2}$

19.- $x = -2$, *doble*

20.- $x_1 = 5, x_2 = \frac{1}{2}$

21.- $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$

22.- $x_1 = 4, x_2 = -1$

23.- $x_1 = 0, x_2 = 2$

24.- $x_1 = 1, x_2 = -1$

25.- $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{12}$

26.- $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{2}{3}$

27.- $x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{3}$

28.- $x_1 = 0, x_2 = -\frac{9}{2}$

29.- $x_1 = -2, x_2 = 4$

30.- $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$

31.- $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{3}$

MÉTODO DE RUFFINI.

Descomponer en factores de primer grado los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5$

b) $p(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$

c) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

d) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

e) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

f) $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$

SOLUCIONES

a) $p(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 5)$

b) $p(x) = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

c) $p(x) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

d) $p(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 2)$

e) $p(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 1)$

f) $p(x) = 2 \cdot (x - 1)^3 \cdot (x - \frac{1}{2})$

5.4. FUNCIONES. INTRODUCCIÓN.

IDEA DE FUNCIÓN

Una función real de variable real, es una aplicación de un subconjunto D de los números reales, en $\mathbb{R}$ que a cada número x (origen) le hace corresponder un número $y = f(x)$ (imagen).

$$\begin{array}{ccc} f: D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Al conjunto D le llamamos Dominio de $f(x)$. Lo representamos por $Dom f(x)$

EJEMPLOS:

1) Una sucesión es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$, por ejemplo:

$$f(n) = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

2) Las funciones que mejor podemos estudiar, son aquellas definidas con una única fórmula, aunque hay algunas que necesitan más de una:

En una determinada ciudad, el recibo mensual del agua sigue las siguientes reglas:

5 € fijos de mantenimiento de instalación.

Los primeros 18 metros cúbicos, se pagan a $4\text{€}/m^3$

Los metros cúbicos que sobrepasen los 18, se pagan a 6 €.

Entonces:

$x = m^3$ consumidos un cierto mes. El dominio $[0, +\infty[$

$y = f(x)$ = Cantidad a pagar expresada en €.

Necesitamos dos fórmulas para expresar esta función. (función definida a trozos):

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq 18 \\ 5 + 18 \cdot 4 + (x - 18) \cdot 6, & \text{si } x > 18 \end{cases} \quad ; \text{ y simplificando:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5 + 4x, & 0 \leq x \leq 18 \\ 6x - 31, & \text{si } x > 18 \end{cases}$$

3) Muchas situaciones de la vida real se pueden explicar mediante funciones, aunque no mediante fórmulas, por ejemplo:

x = momento del día 8 de Mayo e 2009, expresado en horas. El dominio $[0, 24[$

$y = f(x)$ temperatura en Moscú el día 8 de Mayo de 2009.

TABLA DE VALORES

Son tablas que representan algunos de los valores origen e imagen de la función.

En los ejemplos anteriores

1)

x	y
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11

2)

x	y
0	5
5	25
10	45
15	65
20	89
25	119

3) Supongamos que se toman las temperaturas cada 4h. La tabla podría ser:

x	0	4	8	12	16	20
y	3	-1	2	8	10	7

O bien tomándola cada 2 horas:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
y	3	1	-1	0	2	4,5	8	11	10	10	7	4

Y así podríamos aumentar el número de datos, tomándola cada hora, o cada media hora,...
(Estos valores son inventados, no corresponden a mediciones reales)

GRÁFICA

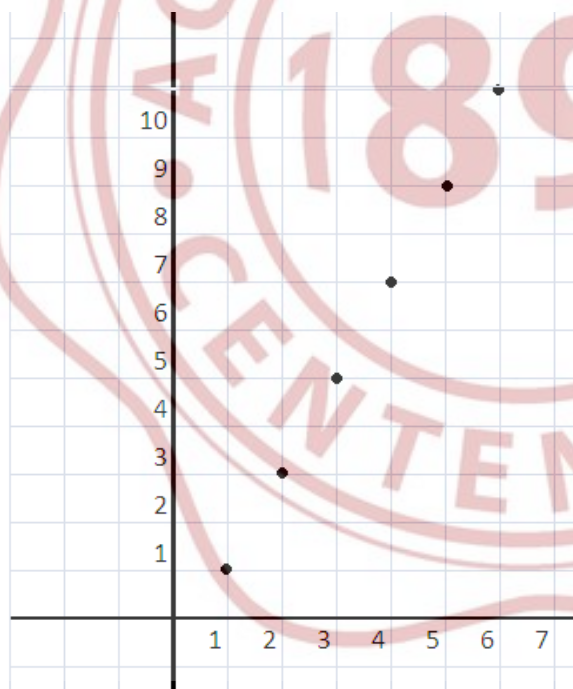
La gráfica de una función es el conjunto de puntos del plano:

$$\text{Graf } f(x) = \{(x, y), \text{ tal que } x \in \text{Dom}f(x), y = f(x)\}$$

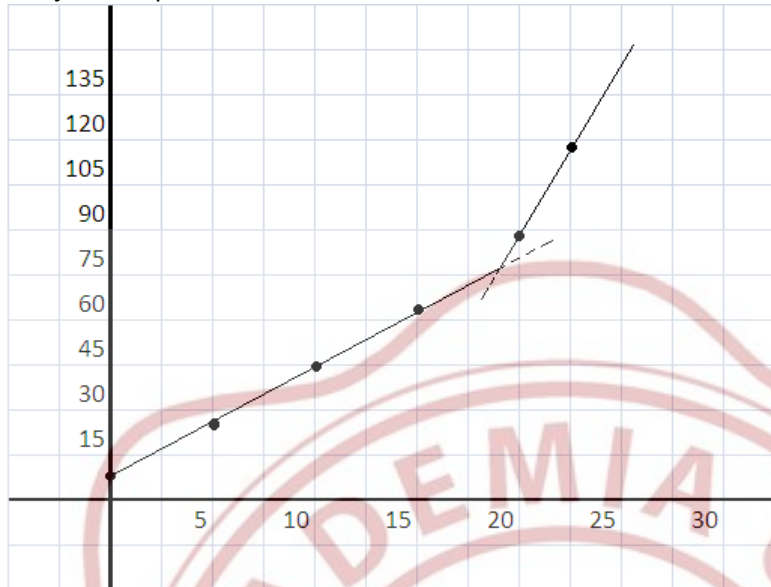
EJEMPLOS

1) En el primer ejemplo la gráfica es un conjunto de infinitos puntos aislados. Como veremos más adelante, estos puntos estarían sobre una recta, ya que la fórmula que define esta sucesión es de primer grado.

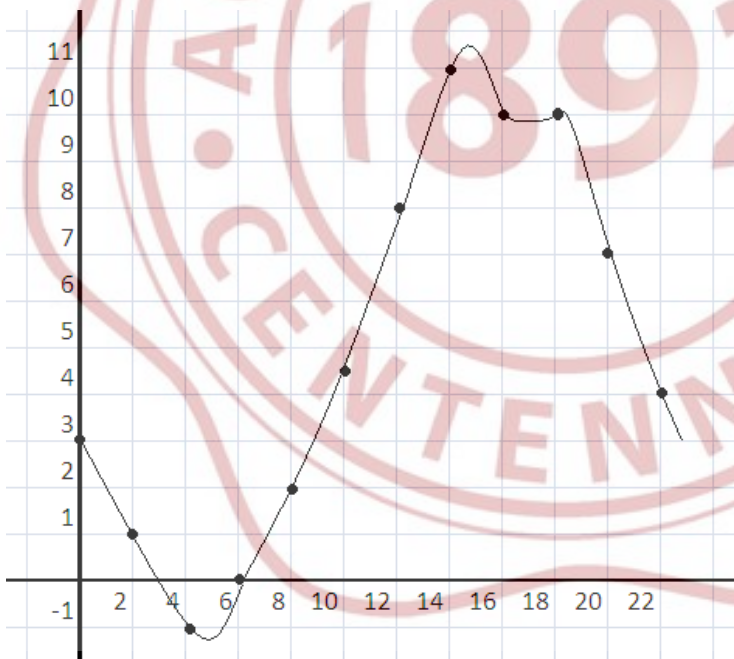
De hecho esta sucesión es una progresión aritmética de primer elemento -1 y razón 2.



2) En el segundo, la gráfica está compuesta por dos segmentos que coinciden en un punto. La dibujamos a partir de los datos de la tabla:



3) La gráfica correspondiente a la tercera función es desconocida, pero conociendo un número grande de puntos podríamos tener una buena aproximación a su gráfica:



OBSERVACIÓN

En esta última gráfica, a partir de unos puntos conocidos, nos hemos inventado el resto de la gráfica.

En este tema aprenderemos las técnicas para obtener gráficas precisas, sin inventar nada, al menos para funciones de las que conozcamos su o sus fórmulas.

5.5. FUNCIONES BÁSICAS

Vamos a ver a continuación una serie de funciones que, por su sencillez o peculiaridades, no necesitamos hacer un estudio exhaustivo de sus características para poder dibujar su gráfica.

Funciones Polinómicas.

Definición: Una función Polinómica de grado n es una expresión del tipo:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

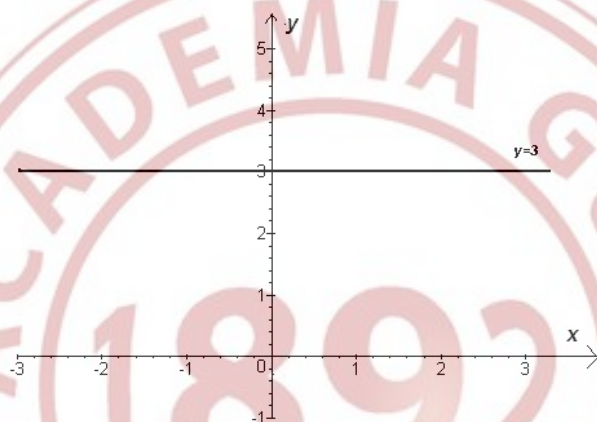
Grado 0. Función Constante.

$$y = f(x) = a$$

La gráfica es una recta horizontal. En todos los puntos de la recta, la coordenada $y = a$

Ejemplo:

$$y = f(x) = 3$$



Observaciones:

- 1.- En particular, la ecuación del **Eje X** es $y = 0$
- 2.- De la misma forma, $x = a$ es una **recta vertical**, y $x = 0$, es la ecuación del **Eje Y**.

Grado 1. Rectas Oblicuas.

$$y = f(x) = ax + b, \quad a \neq 0.$$

La gráfica es una recta de pendiente ⁽¹⁾ a . Para dibujar la gráfica, busquemos, siempre que sea posible, los **Puntos de Corte con los Ejes de Coordenadas**:

$$\text{Eje X: } y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

$$\text{Eje Y: } x = 0 \Rightarrow y = b$$

y con estos dos puntos, ya podemos dibujar la recta.

Ejemplo:

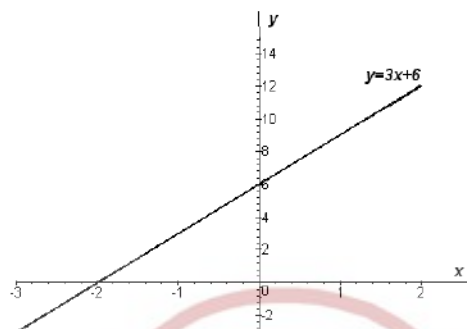
$$y = f(x) = 3x + 6$$

Puntos de Corte :

$$\text{Eje X : } y = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Eje Y : } x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot 0 + 6 \Rightarrow y = 6$$

Gráfica:



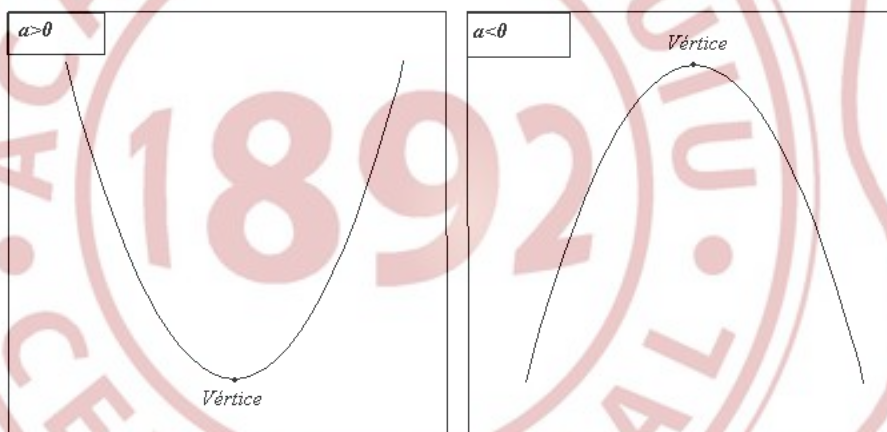
Observación:

Sí $b = 0$, los dos puntos de corte son el mismo. Para dibujar la gráfica, en este caso, tenemos que encontrar un segundo punto⁽²⁾, dándole un valor cualquiera a x y hallando y .

Grado 2. Parábolas.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

La gráfica es una Parábola:



Para dibujar la gráfica de una parábola, calculamos:

Puntos de Corte con los ejes:

$$\text{Eje X: } y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Eje Y: } x = 0 \Rightarrow y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c$$

Vértice:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c \Rightarrow (\text{simplificando}) \quad y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Observaciones:

1.- Dependiendo del signo de $b^2 - 4ac$, la parábola puede tener 2 puntos de corte con el **Eje X**, un único punto de corte con el **Eje X** (que coincide con el vértice) ó ningún punto de corte con el **Eje X**.

2.- Para no tener que recordar la fórmula del Vértice, podemos aplicar la teoría general para el cálculo de máximos y/o mínimos relativos:

$$y' = 2ax + b$$

$$2ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}, \text{ y la coordenada y la calculamos igual que antes.}$$

3.- Si con los cálculos anteriores no tenemos suficiente, calculamos 2 o 3 puntos auxiliares y tener en cuenta que la parábola es simétrica respecto a la vertical que pasa por el vértice.

Ejemplo:

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Puntos de Corte:

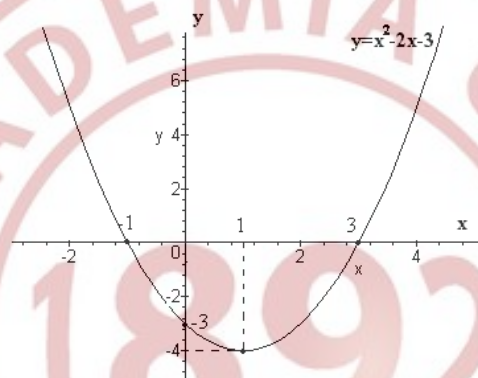
$$\text{Eje X : } y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Eje Y : } x = 0 \Rightarrow y = -3$$

Vértice:

$$x = \frac{-(-2)}{2} = 1 \Rightarrow y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

Gráfica:



Otras curvas de segundo grado⁽³⁾.

La circunferencia

La ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio R , es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Análogamente, la curva definida por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

es una circunferencia de centro en $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, y radio $R = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$.

siempre y cuando el término $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$ sea positivo.

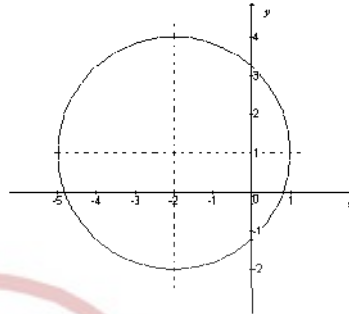
Ejemplo:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

$$\text{Centro: } \left(-\frac{4}{2}, -\frac{-2}{2}\right) = (-2, 1)$$

$$\text{Radio: } R = \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{(-2)^2}{4} - (-4)} = \sqrt{9} = 3$$

Gráfica:



Elipse de centro en (0,0) y ejes propios = ejes de coordenadas⁽⁴⁾

La curva definida por la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 = C, \text{ con } \text{signo}A = \text{signo}B = \text{signo}C, A \neq B$$

es una elipse de centro en (0,0) y ejes propios = ejes de coordenadas.

Para dibujar la gráfica, hallamos:

Puntos de Corte con los ejes:

$$\text{Eje X: } y = 0 \Rightarrow Ax^2 = C \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{C}{A}}$$

$$\text{Eje Y: } x = 0 \Rightarrow By^2 = C \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{C}{B}}$$

A los valores positivos de estos puntos de corte se les llama *longitud de los semiejes*.

Análogamente, si conocemos la longitud de los semiejes, a y b , la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ejemplo:

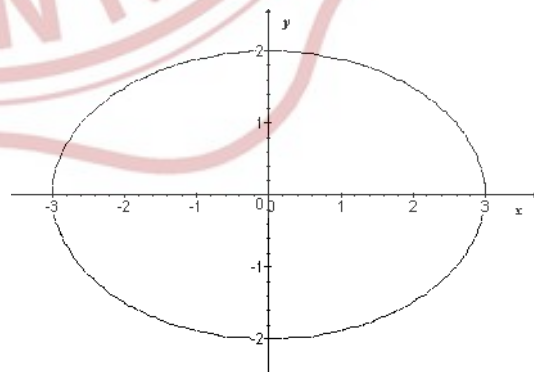
$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

Puntos de corte:

$$\text{Eje X: } y = 0 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Eje Y: } x = 0 \Rightarrow 9y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

Gráfica:



Hipérbola de centro en (0,0) y ejes propios = ejes de coordenadas

La curva definida por la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 = C, \text{ con } \text{signo}A \neq \text{signo}B$$

es una hipérbola de centro en (0,0) y ejes propios = ejes de coordenadas.

Para dibujar la gráfica, hallamos:

Puntos de Corte con los ejes:

$$\text{Eje X : } y = 0 \Rightarrow Ax^2 = C \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{C}{A}}$$

$$\text{Eje Y : } x = 0 \Rightarrow By^2 = C \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{C}{B}}$$

Dependiendo del signo de C, uno de estos valores no existe, pues da la raíz de un número negativo.

Asíntotas Oblicuas⁽⁵⁾:

La ecuación de las asíntotas oblicuas se obtiene, en este caso, cambiando C por 0 y despejando la y. Son dos rectas que pasan por el (0, 0)

$$Ax^2 + By^2 = 0 \Rightarrow By^2 = -Ax^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-\frac{A}{B}} x$$

Ejemplo:

$$4x^2 - 9y^2 = 36$$

Puntos de corte:

$$\text{Eje X : } y = 0 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

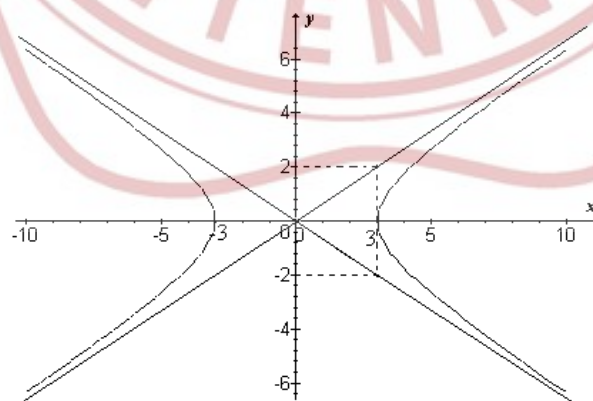
$$\text{Eje Y : } x = 0 \Rightarrow -9y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = -4 \Rightarrow \text{No existe.}$$

Asíntotas:

$$4x^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow 9y^2 = 4x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9}x^2 \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}x;$$

que son dos rectas que pasan por los puntos (0,0) y (3, ±2)

Gráfica:

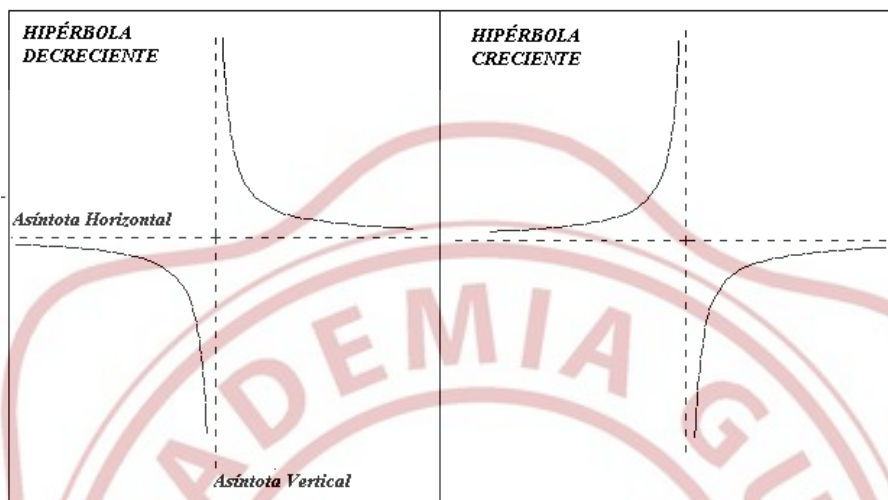


Hipérbolas de Asíntotas Vertical y Horizontal

La gráfica de una función del tipo:

$$y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0$$

es una hipérbola, de asíntotas horizontal y vertical:



Observaciones:

1. Teniendo en cuenta que a puede ser 0, la fórmula de la hipérbola la podemos recordar como:

$$y = f(x) = \frac{\text{número}}{\text{primer grado}} \quad \text{o bien} \quad y = f(x) = \frac{\text{primer grado}}{\text{primer grado}}$$

2. Que sea una hipérbola creciente o decreciente depende del signo de la derivada, sin embargo lo podemos decidir simplemente observando alguno de los puntos de corte con los ejes (si tiene) o algún punto auxiliar.

Gráfica:

Para dibujar la gráfica de una hipérbola, calculamos:

Asíntotas:

Vertical: La asíntota vertical corresponde al valor de x para el que no existe y , por lo tanto, igualamos el denominador a 0:

$$cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$$

Horizontal: La asíntota horizontal es el valor de y al que se acerca la función cuando x se hace cada vez mayor o menor:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \quad (6)$$

Puntos de Corte con los ejes:

$$\text{Eje X: } y = 0 \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = 0 \Rightarrow ax+b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Eje Y: } x = 0 \Rightarrow y = \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} \Rightarrow y = \frac{b}{d}$$

Observaciones:

- 1.- Si $a = 0$ entonces no hay punto de corte con el eje X. En este caso, la asíntota horizontal es el eje X ($y = 0$).
- 2.- Análogamente, si $d = 0$, no hay punto de corte con el eje Y, que será la asíntota vertical.

Ejemplo:

$$y = f(x) = \frac{2x-4}{x+1}$$

Asíntotas :

Vertical : $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Horizontal : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-4}{x+1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y=2$

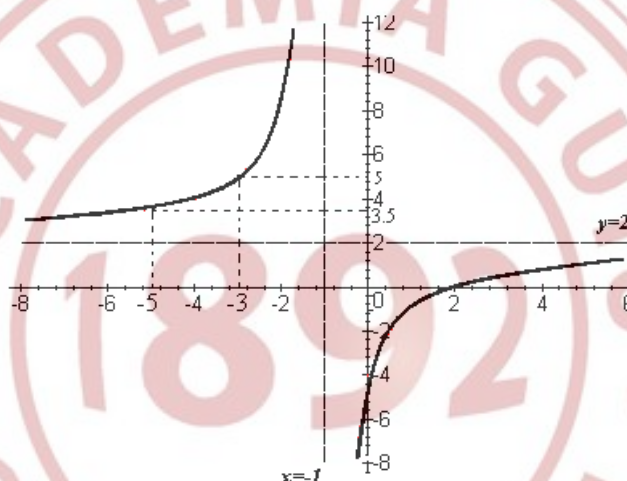
Puntos de Corte :

Eje X : $y=0 \Rightarrow \frac{2x-4}{x+1}=0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$

Eje Y : $x=0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0 - 4}{0+1} \Rightarrow y = -4$

Puntos Auxiliares* :
$$\begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = \frac{2(-3)-4}{-3+1} = 5 \\ x = -5 \Rightarrow y = \frac{2(-5)-4}{-5+1} = \frac{7}{2} = 3.5 \end{cases}$$

* Al estar los dos puntos de corte a la derecha de la asíntota vertical, hallamos un par de puntos a su izquierda para poder dibujar mejor la gráfica.



- (1) La pendiente de una recta es un número que nos indica cual es su inclinación. Si la recta "sube" (mirando de izquierda a derecha) la pendiente es positiva, si la recta "baja" la pendiente es negativa. Podemos definir la pendiente como el incremento de y cuando x aumenta en 1. También como la *tangente del ángulo* que forma la recta con una horizontal.
- (2) Esto lo haremos siempre que con los puntos característicos de una función no tengamos suficientes datos para dibujar su gráfica. En lo sucesivo, a estos puntos "normales" les llamaré puntos auxiliares.
- (3) Algunas curvas no se consideran funciones pues para un valor de x tenemos dos o más valores de y . Para expresar estas curvas como funciones debemos despejar la y y nos quedan varias funciones que representan trozos de la curva.
- (4) Los ejes propios de una elipse o hipérbola son sus ejes de simetría. El estudio general de la elipse y la hipérbola, con otros ejes propios, no es objeto de este curso..
- (5) Una asíntota es una recta a la que la gráfica se acerca cuando nos alejamos hacia el infinito.
- (6) Cuando x tiende a infinito los términos constantes, es decir los que no multiplican a x , son relativamente insignificantes, por ello al hacer el límite solo nos quedan los términos que multiplican a x .

Funciones Exponenciales y Logarítmicas.

Definición: Sea a un número real positivo. La Función Exponencial de Base a es:

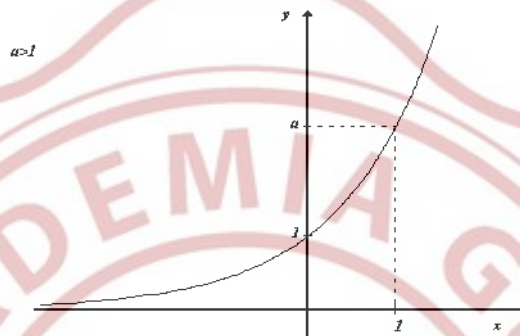
$$f(x) = a^x$$

Propiedades básicas:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$

CASO 1 . $a > 1$

La gráfica de la función exponencial es :



Nota: Es interesante memorizar esta gráfica. A partir de este dibujo podemos “deducir “ las siguientes propiedades:

PROPIEDADES:

1. $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
4. $a^x > 0$ para todo x

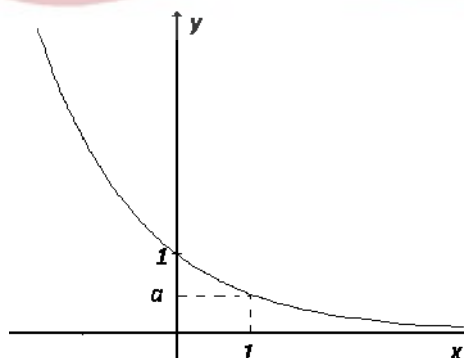
EJEMPLO

El ejemplo más importante de función exponencial es la función exponencial de base e , donde e es el número de Euler: $e \approx 2,72$.

Al ser un número mayor que 1, todo lo anterior es válido cambiando a por e , en las fórmulas y gráfica anterior.

CASO 2. . $0 < a < 1$

La gráfica de la función es :



PROPIEDADES:

1. $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
4. $a^x > 0$ para todo x

Observa como el resultado de los límites queda invertido.

PROPIEDADES DE CÁLCULO.(PARA CUALQUIER BASE)

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
5. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, (Esta propiedad nos dice que muchas de las fórmulas válidas para potencias también lo son, interpretándolas adecuadamente, para raíces).
6. En general $(a + b)^x \neq a^x + b^x$ (Recuerda, por ejemplo, el cuadrado de un binomio).
7. $(a^x \cdot b^x) = (a \cdot b)^x$
8. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

OBSERVACIÓN

La función exponencial nos lleva a la ecuación exponencial:

Dados a y b números conocidos, hallar x tal que $a^x = b$

Para resolver esta ecuación, en general, necesitamos los Logaritmos.

FUNCIONES LOGARITMO

DEFINICIÓN:

A la función inversa de la función exponencial en base a , se le llama *logaritmo en base a* , y se representa por: $f(x) = \log_a x$

Es decir:

1. $\log_a(a^x) = x$
2. $a^{\log_a x} = x$

Y combinando las dos fórmulas anteriores:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

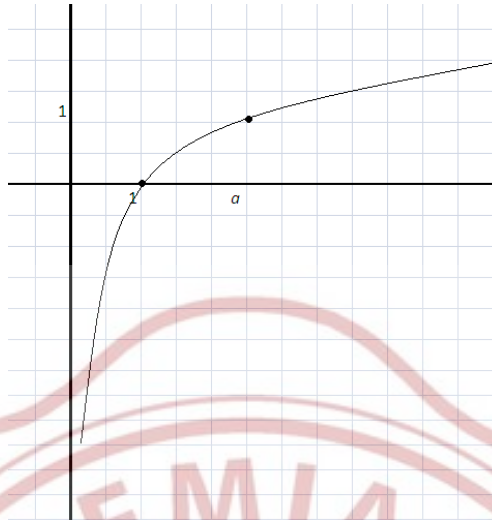
Esta fórmula nos permite resolver la ecuación exponencial.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO.

Como en la función exponencial, se recomienda memorizar el dibujo y deducir de él las propiedades de esta función.

Por cuestiones prácticas veremos solo el caso en que $a > 1$.

Gráfica:



PROPIEDADES (que se ven en la gráfica).

1. $\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_a x) = -\infty$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x) = +\infty$

CASOS PARTICULARES.

- A) Al logaritmo en base e se le llama *logaritmo neperiano* y se le representa por $\ln x$
 Entonces: $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$
- B) Al logaritmo en base 10 se le llama *logaritmo decimal* y se le representa por $\log x$

PROPIEDADES DE CÁLCULO

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$

Aunque las calculadoras más actuales permiten calcular cualquier logaritmo, hasta hace poco solo nos daban el logaritmo neperiano y el decimal. A partir de esta propiedad podemos resolver ecuaciones exponenciales en cualquier base, usando únicamente un logaritmo. Veámoslo en un ejemplo:

Hallar x tal que $2^x = 13$

Aplicando logaritmo neperiano en los dos miembros:

$$\ln 2^x = \ln 13$$

Y por la propiedad anterior:

$$x \cdot \ln 2 = \ln 13$$

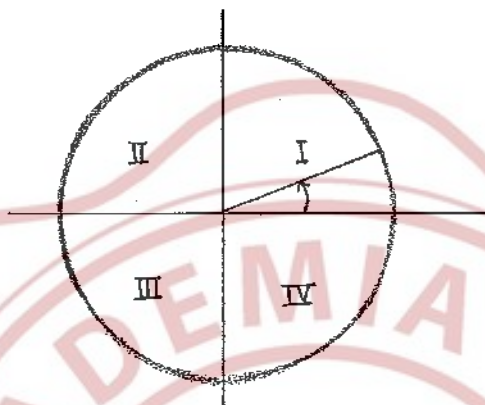
Despejando:

$$x = \frac{\ln 13}{\ln 2} \approx 3,7$$

Funciones trigonométricas.

1 MEDIDA DE ÁNGULOS

En trigonometría, se utiliza una circunferencia de radio 1, dividida en cuatro cuadrantes (I, II, III y IV) mediante unos ejes de coordenadas, para definir todas las magnitudes. Los ángulos se consideran positivos siempre que se midan en sentido contrario al de las agujas del reloj.



Los ángulos pueden ser medidos en tres unidades: grados sexagesimales, radianes y grados centesimales. Esta última forma es poco utilizada. La equivalencia entre las dos primeras es:

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

Así, por ejemplo:

$$30^\circ = 30^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{30}{180} \pi \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Relación entre arco y radio

El valor del arco de la circunferencia que determina un cierto ángulo α , medido sobre una circunferencia de radio R, es:

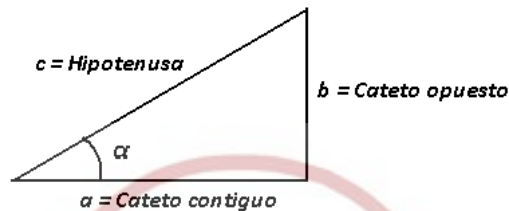
$$\text{arco} = \alpha \cdot R$$

La única condición para aplicar esta fórmula es que el ángulo esté medido en radianes.

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS.

DEFINICIÓN CLÁSICA . (Para ángulos entre 0° y 90°)

Dado un triángulo rectángulo, y uno de sus ángulos, α , los lados reciben los siguientes nombres:



Entonces, llamamos:

Seno de α : $\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{c}$ (también se representa por $\sin(\alpha)$)

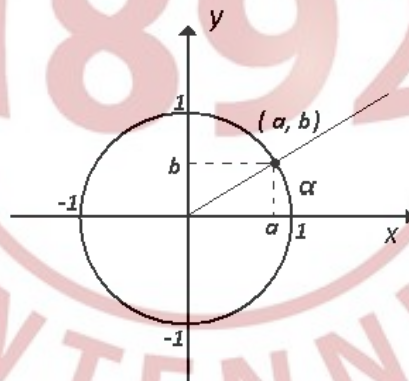
Coseno de α : $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$

Tangente de α : $\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$ (también $\text{tg}(\alpha)$)

Estas razones, al ser cocientes entre magnitudes, son positivas.

DEFINICIÓN ACTUAL.(Para cualquier ángulo)

Insertamos el ángulo, empezando en el semieje positivo de las x , en una circunferencia de radio 1, centrada en el origen de coordenadas, tal como muestra el dibujo:



Entonces:

$$\text{sen}(\alpha) = b; \quad \cos(\alpha) = a; \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$$

OBSERVACIONES

(1) Es fácil ver que para ángulos del PRIMER CUADRANTE, las dos definiciones son equivalentes, ya que la hipotenusa es 1.

(2) Esta definición nos permite determinar el signo de las razones trigonométricas, según el cuadrante en que nos encontramos:

	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$	$\text{tan}(\alpha)$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-



ALGUNAS RAZONES TRIGONÓMETRICAS CONCRETAS.

Las siguientes tablas muestran las razones de algunos ángulos muy habituales en problemas de trigonometría.

DEG	RAD	SEN	COS	TAN
0	0	0	1	0
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞

DEG	RAD	SEN	COS	TAN
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

(DEG: Grados sexagesimales; RAD: Radianes)

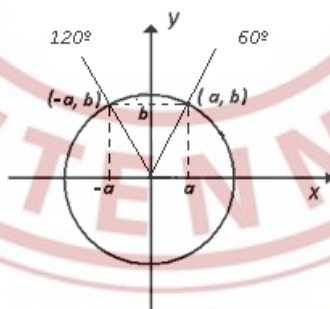
Es interesante destacar que los ángulos que suman 90° ($\alpha + \beta = 90^\circ$) se llaman ángulos complementarios y sus senos y cosenos están intercambiados. Los ángulos que suman 180° ($\alpha + \beta = 180^\circ$) se llaman ángulos suplementarios.

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Veamos mediante un ejemplo como podemos saber las razones de otros ángulos relacionándolos con los ángulos de la tabla anterior.

EJEMPLO

Hallar las razones trigonométricas de un ángulo de 120°



Como muestra la figura, 120° y 60° , están relacionados por la fórmula $60^\circ = 180^\circ - 120^\circ$. Entonces sus razones trigonométricas están relacionadas así:

$$\begin{aligned}\sin(120) &= \sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos(120) &= -\cos(60) = -\frac{1}{2} \\ \tan(120) &= -\tan(60) = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

De manera similar, podemos relacionar ángulos del II y III cuadrante con ángulos del primero, para conocer sus razones.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Fórmulas de adición:

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Fórmulas del ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Transformación de sumas en productos:

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Fórmulas del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$$

Teorema del seno:

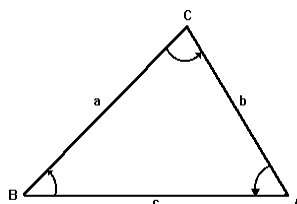
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



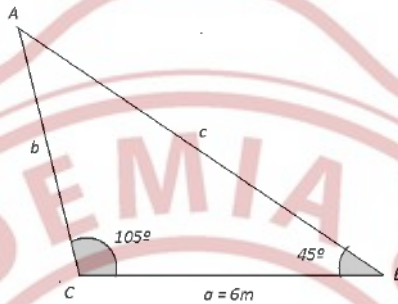
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolver un triángulo significa dar el valor de sus tres ángulos y sus tres lados.

Para ello basta con conocer tres de estos datos (que no sean los tres ángulos) y aplicar correctamente los teoremas del Seno y el Coseno, y la propiedad : *“la suma de los tres lados de un triángulo es 180°”*.

EJEMPLO

De un triángulo sabemos que: $a = 6 \text{ m}$, $B = 45^\circ$ y $C = 105^\circ$. Calcula los restantes elementos.



SOLUCIÓN:

Primero calculamos el ángulo A

$$\hat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$$

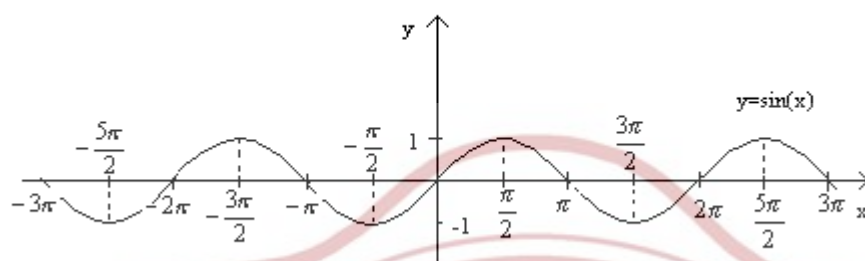
Luego aplicaremos el teorema del seno.

$$\frac{6}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 45^\circ} \rightarrow b = 6 \cdot \frac{\text{sen } 45^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

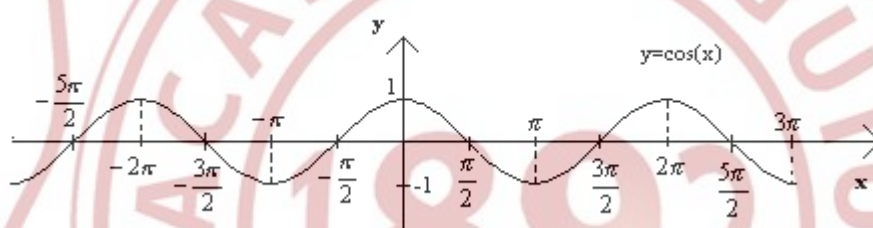
$$\frac{6}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 105^\circ} \rightarrow c = 6 \cdot \frac{\text{sen } 105^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = 11.6 \text{ m}$$

Gráfica de las funciones trigonométricas.

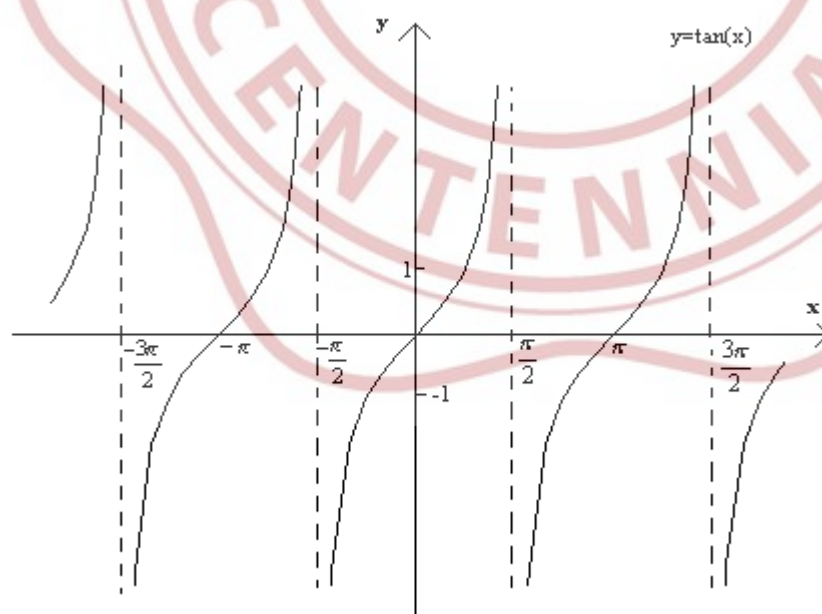
Función $y=\sin(x)$



Función $y=\cos(x)$



Función $y=\tan(x)$



5.6. LÍMITES Y DERIVADAS.

IDEA DE LÍMITE (A desarrollar en clase)

IDEA DE DERIVADA. (A desarrollar en clase)

CÁLCULO DE FUNCIONES DERIVADAS:

TABLA DE DERIVADAS INMEDIATAS

Nombre	$f(x)$	$f'(x)$	Observaciones
Constantes	k	0	$k \in \mathbb{R}$
"Polinómicas"	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
Trigonómicas	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	
	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	
	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$	
"Arcos"	$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
	$\operatorname{arccos} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{x^2 + 1}$	
Exponenciales	e^x	e^x	
	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
Logarítmicas	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$

PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS

1. Suma.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

2. Producto por un número.

$$(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3. Producto de funciones.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4. Cociente de funciones.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

5. Composición de funciones. Regla de la Cadena.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

6. Exponencial de funciones. Derivación Logarítmica.

$$\left(f(x)^{g(x)} \right)' = \left(f(x)^{g(x)} \right) \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right)$$

NOTA

Para aprender a derivar tenemos que memorizar la tabla de inmediatas, aprendernos y entender estas propiedades y sobre todo, practicar, practicar y practicar.

CÁLCULO DE LÍMITES EN R

Sea a un número ó infinito, $f(x)$ una función. Queremos calcular $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

1º. Sustituimos x por a en $f(x)$, es decir, "hallamos $f(a)$ ". Entonces:

A). Sí $f(a)$ es un número, $L = f(a)$.

B) Sí $f(a)$ no es número, pero es una *expresión algebraica* (ver anexo):

B₁) Si es determinada, entonces ya conocemos el valor de L .

B₂) Si es una *indeterminación*, tenemos que resolverla.

ANEXO. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Son expresiones que no son números pero pueden aparecer como resultado de un límite. Las determinadas son aquellas que siempre tienen el mismo valor. Las indeterminadas son las que dependen de cada caso concreto. Las expresiones algebraicas que nos podemos encontrar al hacer un límite son las siguientes:

Sea k un número distinto de 0, entonces:

SUMAS:

a) $k \pm \infty = \pm\infty$

b) $0 \pm \infty = \pm\infty$

c) $(+\infty) + \infty = +\infty$

d) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

Indeterminación: $(+\infty) - \infty$

PRODUCTOS:

a) $k \cdot \infty = \infty$

b) $\infty \cdot \infty = \infty$

Indeterminación: $0 \cdot \infty$

COCIENTES:

a) $\frac{k}{\infty} = 0$

b) $\frac{\infty}{k} = \infty$

c) $\frac{k}{0} = \infty$

d) $\frac{\infty}{0} = \infty$

e) $\frac{0}{\infty} = 0$

Indeterminaciones: $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$

POTENCIAS:

Si $k > 1$:

a) $k^{+\infty} = +\infty$

b) $k^{-\infty} = 0$

Si $0 < k < 1$:

a) $k^{+\infty} = 0$

b) $k^{-\infty} = +\infty$

Si $k > 0$:

a) $(+\infty)^k = +\infty$

b) $(+\infty)^{-k} = 0$

Indeterminaciones: $(+\infty)^0$, $1^{+\infty}$ y 0^0

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES.

A) $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$

Regla de L'Hôpital: Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ó $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Caso particular. $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

a) Si $\text{grado}(P(x)) > \text{grado}(Q(x))$, entonces $L = \infty$.

b) Si $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$, entonces $L = 0$.

c) Si, $\text{grado}(P(x)) = \text{grado}(Q(x))$, entonces

$$L = \frac{\text{Término de mayor grado de } P(x)}{\text{Término de mayor grado de } Q(x)}.$$

B) $0 \cdot \infty$

Si $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$, entonces:

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \quad \text{ó} \quad L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Y lo resolvemos por la regla de L'Hôpital.

C) CRITERIO DEL NÚMERO e:

$(+\infty)^0$, $1^{+\infty}$ y 0^0

Si $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = (+\infty)^0$, $1^{+\infty}$ ó 0^0 , entonces:

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Y como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x) = 0 \cdot \infty$, lo resolvemos como en B).

Nota: Si la indeterminación es 1^∞ también es válido (y más fácil)

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot [f(x) - 1]}$$

D) $(+\infty) - \infty$

Si $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = (+\infty) - \infty$, entonces, multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x))}{f(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x))^2 - (g(x))^2}{f(x) + g(x)}$$

Y este límite será determinado ó $\frac{\infty}{\infty}$

EJERCICIOS DE DERIVADAS

I.- Deriva las siguientes funciones:

1.- $y = x^4 - 2x^2 + 1$

2.- $y = x^4 - 2x^3 + x^2$

3.- $y = x^5 + 3x^4 - x^2 - 5$

4.- $y = \ln x + \sqrt{x} - \operatorname{sen} x$

5.- $y = 5^x + \cos x$

6.- $y = \frac{x+3}{x^2-1}$

7.- $y = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

8.- $y = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$

9.- $y = e^x \cdot Lx$

10.- $y = x \cdot Lx$

11.- $y = \frac{1}{x} \cdot Lx$

12.- $y = 6^x - 4e^x$

13.- $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

14.- $y = \sqrt{4x}$

15.- $y = x^4 \sqrt[3]{x^2} + 1$

16.- $y = \frac{5x+3}{10}$

17.- $y = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{8}$

18.- $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctag} x$

19.- $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$

20.- $y = \ln(x\sqrt{x})$

21.- $y = \frac{-5x^{14}}{7} - \frac{25}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

II.- Deriva las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena:

1.- $y = \frac{5}{(x-5)^2}$

2.- $y = L(2x^2 - 3x + 1)$

3.- $y = 4^{3x^2+2x-1}$

4.- $y = \frac{L(2x-3)}{2}$

5.- $y = L\sqrt{2x-3}$

6.- $y = \sqrt[5]{(5x-3)^2}$

7.- $y = \frac{2x+3}{(x+5)^2}$

8.- $y = (x^3 + x)^3$

9.- $y = (x^4 - 2x^3 + x^2 - 5)^5$

10.- $y = \sqrt{4x+3}$

11.- $y = \sqrt{1-4x}$

12.- $y = \sqrt{10x^2+8x}$

13.- $y = \operatorname{sen}(2x+1)$

14.- $y = \cos(x^2+3x)$

15.- $y = \operatorname{sen}(Lx)$

16.- $y = \operatorname{sen}^2 x$

17.- $y = \operatorname{sen} x^2$

18.- $y = \cos(e^x + \sqrt{x})$

19.- $y = \operatorname{arctag} x^2$

20.- $y = \operatorname{arc} \cos(1-x)$

21.- $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x+1)$

22.- $y = \operatorname{tag} \sqrt{x}$

23.- $y = \ln \frac{e^x}{e^x - 1}$

24.- $y = \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2} \cos^2 x$

SOLUCIONES:

I.-

$$1.- y' = 4x^3 - 4x$$

$$2.- y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$3.- y' = 5x^4 + 12x^3 - 2x$$

$$4.- y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x$$

$$5.- y' = 5^x \cdot L5 - \operatorname{sen} x$$

$$6.- y' = \frac{-x^2 - 6x - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$7.- y' = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$8.- y' = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$9.- y' = e^x \cdot Lx + \frac{e^x}{x}$$

$$10.- y' = Lx + 1$$

$$11.- y' = -\frac{Lx}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$12.- y' = 6^x \cdot L6 - 4e^x$$

$$13.- y' = \frac{2x - Lx}{2x\sqrt{x}}$$

$$14.- y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$15.- y' = \frac{14}{3} x^{11/3}$$

$$16.- y' = \frac{1}{2}$$

$$17.- y' = \frac{x^3 - x}{2}$$

$$18.- y' = \frac{\operatorname{artag} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$$

$$19.- y' = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}$$

$$20.- y' = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$21.- y' = -10x^{13} + \frac{50}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

II.-

$$1.- y' = \frac{-10}{(x-5)^3}$$

$$2.- y' = \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}$$

$$3.- y' = 4^{3x^2+2x-1} \cdot L4 \cdot (6x+2)$$

$$4.- y' = \frac{1}{2x-3}$$

$$5.- y' = \frac{1}{2x-3}$$

$$6.- y' = \frac{2}{\sqrt[5]{(5x-3)^3}}$$

$$7.- y' = \frac{2(2-x)}{(x+5)^3}$$

$$8.- y' = 3(x^3+x)^2(3x^2+1)$$

$$9.- y' = 5(x^4-2x^3+x^2-5)^4(4x^3-6x^2+2x)$$

$$10.- y' = \frac{2}{\sqrt{4x+3}}$$

$$11.- y' = \frac{-2}{\sqrt{1-4x}}$$

$$12.- y' = \frac{10x+4}{\sqrt{10x^2+8x}}$$

$$13.- y' = 2\cos(2x+1)$$

$$14.- y' = -(2x+3) \cdot \operatorname{sen}(x^2+3x)$$

$$15.- y' = \frac{\cos(Lx)}{x}$$

$$16.- y' = 2\operatorname{sen} x \cos x$$

$$17.- y' = 2x \cdot \cos x^2$$

$$18.- y' = -\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \operatorname{sen}(e^x + \sqrt{x})$$

$$19.- y' = \frac{2x}{1+x^4}$$

$$20.- y' = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$21.- y' = \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}$$

$$22.- y' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}}$$

$$23.- y' = \frac{1}{1-e^x}$$

$$24.- y' = \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}$$

EJERCICIOS DE LÍMITES

1.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

2.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$

3.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

4.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

5.- $\lim_{x \rightarrow \infty} x(5^{1/x} - 1)$

6.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin x}$

7.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(\sin x + \tan x)^2}$

8.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{5x - 5}$

9.- $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$

10.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{x^2 \ln x}$

11.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{5x}$

12.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{(26 + x)^{1/3} - 3}$

13.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

14.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

15.- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}$

16.- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + x^{1/3}}{1 + x^{1/5}}$

17.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 4x}$

18.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)e^x - 2}{3x}$

19.- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

20.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x}{x}$

21.- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(3^{1/x} - 1 \right)$

22.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

23.- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

24.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

25.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot x}$

26.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

27.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^4 x}{x^2}$

28.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

29.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

30.- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2}{x}$

31.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

32.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - \sin x}$

33.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

34.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 2x^2 - 1}{3x^2}$

35.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^3}$

36.- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$

37.- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

38.- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

39.- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right)$

40.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

41.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\ln x}$

42.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

43.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

44.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$

45.- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

46.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{x^2}$

47.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

48.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{6x}$

$$46.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{x^2}$$

$$47.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$48.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{6x}$$

$$49.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{x}$$

$$50.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{6x^2 - 2x^3}$$

$$51.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{\ln(5x^2 - 19)}$$

$$52.- \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x}$$

$$53.- \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x + 3)^{1/x}$$

$$54.- \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$$

$$55.- \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{sen} 6x}{x - \pi/2}$$

$$56.- \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{\cot g x}$$

$$57.- \lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x}$$

$$58.- \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x})^{e^x}$$

$$59.- \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \cos x)^{\operatorname{tag} x}$$

$$60.- \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\operatorname{sen}(x^2 - 16)}$$

$$61.- \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$$

$$62.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 7x \cos(2x) + 7x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$63.- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2}$$

$$64.- \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$$

$$65.- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$$

$$66.- \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{2x - 1}$$

$$67.- \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} \right)^{x+2}$$

$$68.- \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tag} x)^{\operatorname{sen} x}$$

$$69.- \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$$

Soluciones:

1.- 1	2.- -1	3.- 0	4.- 0	5.- $\ln 5$	6.- $\frac{1}{2}$	7.- $\frac{1}{4}$
8.- $\frac{1}{5}$	9.- 0	10.- 6	11.- $\frac{1}{5}$	12.- 54	13.- 2	14.- $-\frac{1}{4}$
15.- 1	16.- $\frac{5}{3}$	17.- $-\frac{1}{5}$	18.- $\frac{1}{3}$	19.- $\frac{1}{3}$	20.- $+\infty$	21.- $\ln 3$
22.- $\frac{1}{6}$	23.- 0	24.- 0	25.- 0	26.- 2	27.- 0	28.- $\frac{1}{2}$
29.- 0	30.- 2	31.- $-\frac{1}{3}$	32.- $\frac{1}{3}$	33.- 2	34.- $-\frac{5}{6}$	35.- ∞
36.- 0	37.- $\frac{1}{2}$	38.- $\frac{1}{2}$	39.- $-\frac{1}{2}$	40.- $\frac{1}{6}$	41.- $-\frac{1}{2}$	42.- 1
43.- 1	44.- 1	45.- $\cos a$	46.- -20	47.- $\frac{1}{2}$	48.- $\frac{1}{2}$	49.- 6
50.- $\frac{3}{4}$	51.- 0	52.- 1	53.- 1	54.- 1	55.- -6	56.- e^2
57.- 1	58.- e^{-1}	59.- e^{-1}	60.- $\frac{1}{32}$	61.- e^{-6}	62.- 6	63.- -1
64.- e^{-1}	65.- $-\frac{3}{5}$	66.- $-\frac{\pi}{2}$	67.- e^2	68.- 1	69.- 1	

5.7. ESTUDIO GENERAL DE FUNCIONES. (a desarrollar en clase)

I. DATOS QUE SE OBYIENEN DIRECTAMENTE DE $f(x)$

1. Dominio
 - a) Funciones continuas en $\mathbb{R}$
 - b) Cocientes
 - c) Raíces Pares
 - d) Logaritmos
 - e) Otros.
2. Puntos de Corte
 - a) Eje X
 - b) Eje Y
3. Simetrías Esenciales.
 - a) Función Par.
 - b) Función Impar.
4. Asíntotas.
 - a) Vertical
 - b) Horizontal
 - c) Oblicua

II. DATOS QUE SE OBTIENEN DE $f'(x)$

5. Localización de puntos críticos (o de equilibrio).
6. Crecimiento y decrecimiento.
7. Clasificación de los puntos críticos: Máximos, mínimos y puntos de inflexión

III. DATOS QUE SE OBTIENEN DE $f''(x)$

8. Otros puntos de inflexión.
9. Concavidad y convexidad.

IV. DIBUJO

10. Interpretación Gráfica de los datos obtenidos.

6. INTEGRACIÓN.

6.1. Integral Indefinida.

Sea $f(x)$ una función. Decimos que $F(x)$ es una PRIMITIVA de $f(x)$ si y solo si:
 $F(x)' = f(x)$

EJEMPLO:

$F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$.

OBSERVACIÓN

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces para todo número C , la función $G(x) = F(x) + C$ también es una primitiva de $f(x)$, ya que la derivada de un número es 0.

EJEMPLO. (CONTINUACIÓN)

$G(x) = x^2 + 2010$ también es una primitiva de $f(x) = 2x$.

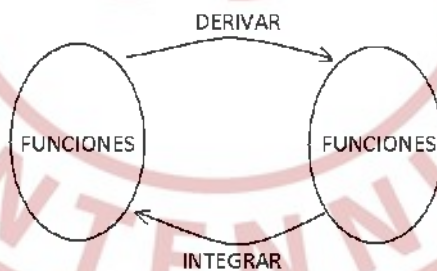
DEFINICIÓN

Llamo INTEGRAL INDEFINIDA DE $f(x)$, al conjunto de **todas** sus primitivas.

Si $F(x)$ es una de ellas, entonces lo representamos como:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

Así



EJEMPLO (CONTINUACIÓN):

$$\int 2x dx = x^2 + C,$$

CÁLCULO DE PRIMITIVAS.
TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS.

Nombre	$f(x)$	$\int f(x)dx$	Observaciones
Constantes	k	$kx + C$	$k \in \mathbb{R}$
"Polinómicas"	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{R}, n \neq -1$
	x^{-1}	$\ln x + C$	
Trigonómicas	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$	
	$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$	
	$\operatorname{tg} x$	$-\ln \cos x + C$	
"Arcos"	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x + C$	$-1 < x < 1$
	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\operatorname{arctg} x + C$	
Hiperbólicas	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x + C$	
	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x + C$	
	$\operatorname{tgh} x$	$\ln(\cosh x) + C$	
Argumentos Hiperbólicos	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\arg \operatorname{senh} x + C$	
	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\arg \cosh x + C$	$x > 1$
	$\frac{1}{1-x^2}$	$\arg \operatorname{tgh} x + C$	
Exponenciales	e^x	$e^x + C$	
	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1$

CASI INMEDIATAS

Las fórmulas anteriores también son válidas cambiando x por $f(x)$ y dx por $f'(x) dx$

EJEMPLO

$$\begin{aligned}(6) \rightarrow \int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{1-(f(x))^2}} &= \arcsin f(x) + c \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} &= \arcsin \ln x + c\end{aligned}$$

PROPIEDADES

$$(1) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(2) \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(3) INTEGRACION POR PARTES

IDEA:

$$\begin{aligned}(f(x) g(x))' &= f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \rightarrow \\ \Rightarrow f(x) g'(x) &= (f(x) g(x))' - f'(x) g(x) \xrightarrow{\text{integrando}} \int f(x) g'(x) dx = \\ &= \int ((f(x) g(x))' - f'(x) g(x)) dx \underset{(1)}{=} \int (f(x) g(x))' dx - \int f'(x) g(x) dx = \\ &= \underline{f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx}\end{aligned}$$

Llamo

$$\begin{aligned}u &= f(x) \quad \rightarrow \quad du = f'(x) dx \\ dv &= g'(x) dx \quad \rightarrow \quad v = g(x)\end{aligned}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

OBS: No hay ninguna norma general para saber cuando y como usar el método de integración por partes.

EJEMPLOS:

$$(i) \quad \int \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

(ii) Integrales cíclicas: Hacer una o más veces partes y sale la misma integral

$$I = \int \sin^2 x dx = \int \sin x \sin x dx$$

$$\begin{array}{l} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}$$

$$= -\sin x \cos x + \int \cos x dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow I = -\sin x \cos x + \int dx - I \Rightarrow 2I = -\sin x \cos x + x$$

$$I = \frac{-\sin x \cos x + x}{2} + C$$

(4) CAMBIO DE VARIABLE

$$I = \int f(x) dx$$

Cambio: Busco una función $x = h(t)$, inversible (puedo despejar t), y derivando $dx = h'(t) dt$, sustituyo en la integral:

$$I = \int f(h(t)) h'(t) dt$$

OBS: La misma que para la integración por partes.

EJEMPLO

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(\ln x) + C$$

$$\ln x = t$$

$$\frac{dx}{x} = dt$$

INTEGRALES RACIONALES

DEF: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde P, Q son polinomios.

CASO 1: grado $P \geq$ grado Q

Dividimos $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)}{C(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$

Entonces $P(x) = Q(x) C(x) + R(x)$

luego $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) C(x) + R(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \underbrace{\int C(x) dx}_{\text{Inmediata}} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx}_{\text{Caso 2}}$$

CASO 2: grado $P <$ grado Q

Descompongo Q en factores: $Q = q_1 \dots q_k$

CASO 2a: Q descompone totalmente en factores de grado 1 distintos entre si:

$$Q(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) \quad \alpha_i \neq \alpha_j$$

Planteamos la ecuación:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_k}{x - \alpha_k} \text{ y encontramos } A_1, \dots, A_k$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \frac{A_1}{x - \alpha_1} dx + \dots + \int \frac{A_k}{x - \alpha_k} dx = \\ &= A_1 \ln|x - \alpha_1| + \dots + A_k \ln|x - \alpha_k| + C \end{aligned}$$

EJEMPLO:

$$I = \int \frac{x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 16x - 11}{x^3 - 7x + 6} dx$$

$$\begin{array}{r} \text{divido} \quad \frac{x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 16x - 11}{-x^4 \quad \quad \quad + 7x^3 \quad \quad - 6x} \quad \left| \quad \frac{x^3 - 7x + 6}{x - 4} \right. \\ \hline \quad \quad \quad - 4x^3 \quad \quad \quad + 10x^2 - 11 \\ \quad \quad \quad + 4x^3 \quad \quad \quad - 28x + 24 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad - 18x + 13 \end{array}$$

$$I = \int (x-4) dx + \int \frac{-18x+13}{x^3-7x+6} = \frac{x^2}{2} - 4x + I_1$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \quad \text{----> Ruffini}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 6 = 0; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$\text{Luego } Q(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

$$\begin{aligned} \frac{-18x+13}{(x-1)(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} = \\ &= \frac{A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -18x+13 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{si } x=1 &\Rightarrow -5 = -4A \Rightarrow A = \frac{5}{4} \\ \text{si } x=2 &\Rightarrow -23 = 5B \Rightarrow B = \frac{-23}{5} \\ \text{si } x=-3 &\Rightarrow 67 = -20C \Rightarrow C = \frac{-67}{20} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{\frac{5}{4}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{-23}{5}}{x-2} dx + \int \frac{\frac{-67}{20}}{x+3} dx$$

$$= \frac{5}{4} \ln|x-1| - \frac{23}{5} \ln|x-2| - \frac{67}{20} \ln|x+3| + C$$

CASO 2b $Q(x)$ descompone en factores de primer grado algunos repetidos.

Por ejemplo: $Q(x) = (x-a_1)^3 (x-a_2)^2 (x-a_3)$

Planteo la ecuación:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \frac{A_3}{(x-a_1)^3} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \frac{C}{x-a_3}$$

Hallamos A's, B's, C, e integral de la suma, suma de integrales.

OBS:

$$n \neq 1 \quad \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} dx = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$$

Nota: Quedan más casos en los que el denominador no se descompone en factores de primer grado, pero por su dificultad, no los desarrollamos en este manual.

6.2 Integral definida. Aplicaciones.

REGLA DE BARROW

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

PROP:

$$(1) \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

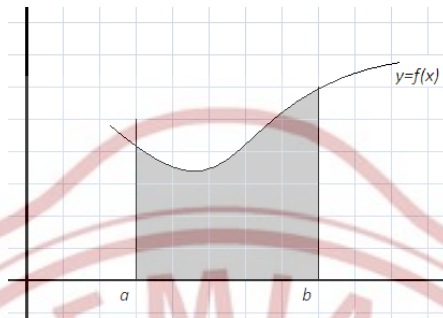
$$(2) \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\forall c \in (a, b))$$

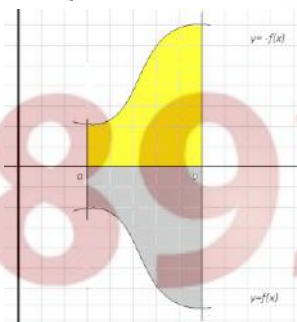
$$(4) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

CALCULO DE AREAS

PROP 1: Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq 0$. Entonces:
 el área comprendida entre la gráfica $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ es: $A = \int_a^b f(x) dx$



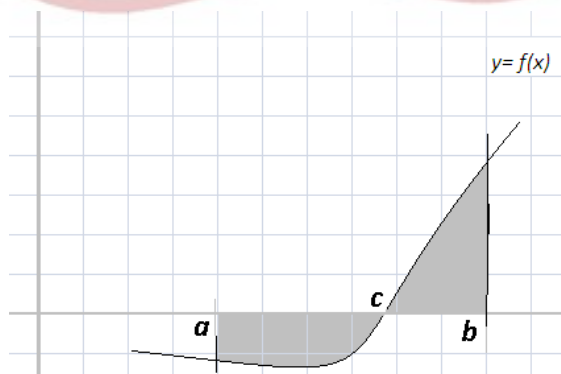
PROP 2: $f(x)$ continua en $[a,b]$, $f(x) \leq 0 \forall x \in [a,b]$
 $A = - \int_a^b f(x) dx$



$$A = \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

PROP 3: $f(x)$ continua en $[a,b]$.
 Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ las soluciones de $f(x) = 0$, comprendidas entre a y b . O sea: $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < b$
 Entonces:

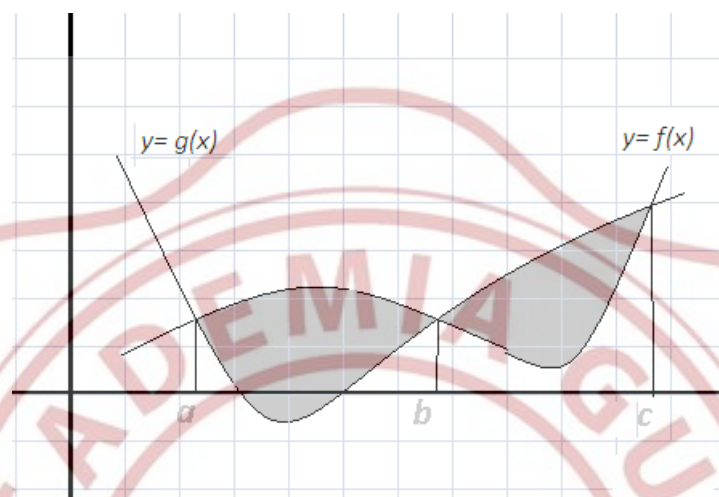
$$A = \left| \int_a^{\alpha_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{\alpha_k}^b f(x) dx \right|$$



AREA ENTRE $Y = f(x)$, $Y = g(x)$

Resuelvo $f(x) = g(x)$. Sean $a_1, \dots, a_k$ las soluciones.

$$A = \left| \int_{a_1}^{a_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{a_2}^{a_3} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} (f(x) - g(x)) dx \right|$$

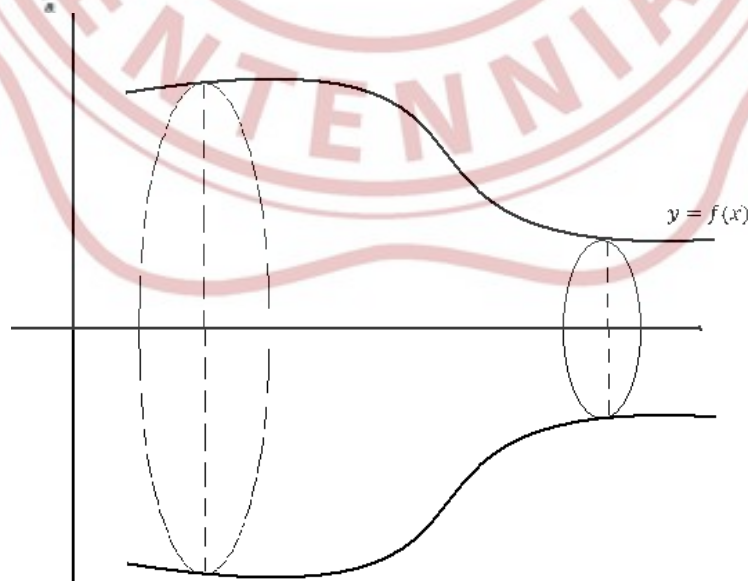


VOLUMENES DE REVOLUCION

DEF: Un volumen de revolución es el encerrado al girar un arco de curva una vuelta completa alrededor de un eje.

PROP : Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$, el volumen encerrado al girar el arco de la gráfica $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$ una vuelta completa en torno al eje x es:

$$V_{\text{ox}} = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$



EJERCICIOS DE INTEGRALES INDEFINIDAS.

1. Calcular la integral $\int x^5 dx$.

Solución.- $\frac{x^6}{6} + C$.

2. Calcular la integral $\int (x + \sqrt{x}) dx$.

Solución.- $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

3. Calcular la integral $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$.

Solución.- $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$.

4. Calcular la integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$.

Solución.- $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$.

5. Calcular la integral $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$.

Solución.- $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$.

6. Calcular la integral $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Solución.- $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^3} + C$.

7. Calcular la integral $\int e^{5x} dx$.

Solución.- $\frac{1}{5}e^{5x} + C$.

8. Calcular la integral $\int \cos 5x dx$.

Solución.- $\frac{\sin 5x}{5} + C$.

9. Calcular la integral $\int \sin ax dx$.

Solución.- $-\frac{\cos ax}{a} + C$.

10. Calcular la integral $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Solución.- $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

11. Calcular la integral $\int \frac{1}{\sin^3 3x} dx$.

Solución.- $-\frac{\cot 3x}{3} + C$.

12. Calcular la integral $\int \frac{1}{\cos^2 7x} dx$.

Solución.- $\frac{\tan 7x}{7} + C$.

13. Calcular la integral $\int \frac{1}{3x-7} dx$.

Solución.- $\frac{1}{3} \ln |3x-7| + C$.

14. Calcular la integral $\int \frac{1}{1-x} dx$.

Solución.- $-\ln |1-x| + C$.

15. Calcular la integral $\int \frac{1}{5-2x} dx$.

Solución.- $-\frac{1}{2} \ln |5-2x| + C$.

16. Calcular la integral $\int \tan 2x dx$.

Solución.- $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$.

17. Calcular la integral $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Solución.- $-\frac{\sin^3 x}{3} + C$.

18. Calcular la integral $\int \cos^3 x \sin x dx$.

Solución.- $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

19. Calcular la integral $\int x\sqrt{x^2+1} dx$.

Solución.- $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C$.

20. Calcular la integral $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$.

Solución.- $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + C$.

21. Calcular la integral $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.

Solución.- $-\frac{1}{\sin x} + C$.

22. Calcular la integral $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

Solución.- $\frac{1}{2 \cos^2 x} + C$.

23. Calcular la integral $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$.

Solución.- $\frac{\tan^2 x}{2} + C$.

24. Calcular la integral $\int \frac{\cot x}{\sin^3 x} dx$.

Solución.- $-\frac{\cot^2 x}{2} + C$.

25. Calcular la integral $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$.

Solución.- $\frac{\ln^2(x+1)}{2} + C$.

26. Calcular la integral $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x + 1}} dx$.

Solución.- $\sqrt{2 \sin x + 1} + C$.

27. Calcular la integral $\int \frac{\sin 2x}{(1 + \cos 2x)^2} dx$.

Solución.- $\frac{1}{2(1 + \cos 2x)} + C$.

28. Calcular la integral $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$.

Solución.- $2\sqrt{1 + \sin^2 x} + C$.

29. Calcular la integral $\int \frac{\sqrt{\tan x + 1}}{\cos^2 x} dx$.

Solución.- $\frac{2}{3} \sqrt{(\tan x + 1)^3} + C$.

30. Calcular la integral $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Solución.- $\frac{\ln^3 x}{3} + C$.

31. Calcular la integral $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Solución.- $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$.

32. Calcular la integral $\int \frac{x}{x^3 + 1} dx$.

Solución.- $\frac{1}{2} \ln(x^3 + 1) + C$.

33. Calcular la integral $\int \frac{x+1}{x^3 + 2x + 3} dx$.

Solución.- $\frac{1}{2} \ln(x^3 + 2x + 3) + C$.

34. Calcular la integral $\int e^{2x} dx$.

Solución.- $\frac{1}{2} e^{2x} + C$.

35. Calcular la integral $\int e^{\frac{x}{2}} dx$.

Solución.- $2e^{\frac{x}{2}} + C$.

36. Calcular la integral $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

Solución.- $e^{\sin x} + C$.

37. Calcular la integral $\int 3^x e^x dx$.

Solución.- $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$.

38. Calcular la integral $\int e^{-3x} dx$.

Solución.- $-\frac{1}{3}e^{-3x} + C$.

39. Calcular la integral $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)dx$.

Solución.- $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + C$.

40. Calcular la integral $\int \frac{1}{1+2x^2} dx$.

Solución.- $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x) + C$.

41. Calcular la integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx$.

Solución.- $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + C$.

42. Calcular la integral $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$.

Solución.- $\arcsin \frac{x}{3} + C$.

43. Calcular la integral $\int \frac{1}{4+x^2} dx$.

Solución.- $\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$.

MÁS.....

01.- $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) dx$

02.- $\int \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right) dx$

03.- $\int \frac{5}{\sqrt[3]{7x^3}} dx$

04.- $\int \frac{dx}{2-x}$

05.- $\int (1+3x^2+x^3) \cdot (1-2x+x^2) dx$

06.- $\int \frac{dx}{(x+1)^4}$

07.- $\int \left(3\cos x - 2\sin x - 3e^{-x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{2+2x^2} - \frac{5}{4\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

08.- $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{3+3x^2} - \frac{8}{\sqrt{9-9x^2}} \right) dx$

09.- Calcular $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = 4x^2 - 6x - 5$ y que $f(-1) = 0$.

10.- De una función se conoce su derivada segunda, $y'' = 3\sin x + 4$ y que $y'(0) = 0$ e $y(0) = 1$. Calcular dicha función.

11.- $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^3}$

12.- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

13.- $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

14.- $\int \frac{x}{1+(x^2+4)^2} dx$

15.- $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}} dx$

16.- $\int \frac{x}{a^4+x^4} dx$

17.- $\int e^x \sqrt{1-e^x} dx$

18.- $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$

19.- $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

20.- $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$

21.- $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

22.- $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} dx$

23.- $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$

24.- $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

25.- $\int x \cdot \cos x dx$

26.- $\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx$

27.- $\int \sin^2 x dx$

28.- $\int x^2 e^{-x} dx$

29.- $\int x^2 (\ln x)^3 dx$

30.- $\int \sin(\ln x) dx$

31.- $\int \arcsen x dx$

32.- $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

33.- $\int x \cdot \operatorname{arctag} x dx$

34.- $\int x \cdot \operatorname{tag}^2 x dx$

35.- $\int \frac{17x-29}{x^2-5x+6} dx$

36.- $\int \frac{x+2}{x^2+x-6} dx$

37.- $\int \frac{x^3-x^4-8}{x^2-4} dx$

38.- $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$

39.- $\int \frac{3x}{x^2-1} dx$

40.- $\int \frac{3x^2-2x+4}{(x-1)^2(x+2)} dx$

$$41.- \int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

$$44.- \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx$$

$$47.- \int x^3 e^{x^2} dx$$

$$50.- \int \frac{dx}{x^3+2x+5}$$

$$53.- \int \frac{\operatorname{tag} x + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$56.- \int \frac{3x+2}{(x-4)^3} dx$$

$$58.- \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

$$60.- \int \frac{x^2+2x+5}{x^2-1} dx$$

$$62.- \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$64.- \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+3)^2}}$$

$$66.- \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$68.- \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$

$$42.- \int \frac{dx}{x^2-4x+8}$$

$$45.- \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$$

$$48.- \int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-6x} dx$$

$$51.- \int \operatorname{sen} x \cdot \ln(\cos x) dx$$

$$54.- \int x^2 \cdot \operatorname{arctag} x dx$$

$$43.- \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$46.- \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$49.- \int \frac{x \cdot e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$52.- \int \frac{dx}{e^x+1}$$

$$55.- \int \frac{x}{a^2+x^2} dx$$

$$57.- \int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$59.- \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1-\operatorname{tag}^2 x}}$$

$$61.- \int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

$$63.- \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$65.- \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$$

$$67.- \int x \cdot \operatorname{arcsen} x^2 dx$$

$$69.- \int \frac{dx}{x[(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2]}$$

SOLUCIONES

01.- $\frac{x^3}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + K$

02.- $e^x - \ln x + K$

03.- $\frac{5}{\sqrt[3]{7}} \ln x + K$

04.- $-\ln(x-2) + K$

05.- $\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - x^2 + x + K$

06.- $\frac{-1}{3(x+1)^3} + K$

07.- $3\sin x + 2\cos x + 3e^{-x} + \operatorname{tag} x - \frac{3}{2} \operatorname{arctag} x - \frac{5}{4} \operatorname{arcsen} x + K$

08.- $3\operatorname{tag} x + \frac{5}{3} \operatorname{arctag} x - \frac{8}{3} \operatorname{arcsen} x + K$

09.- $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 5x - \frac{2}{3}$

10.- $y = -3\sin x + 2x^2 + 3x$

11.- $-\frac{1}{2(1+\ln x)^2} + K$

12.- $\frac{1}{5} \operatorname{arcsen} 5x + K$

13.- $-\frac{1}{2(1+x^2)} + K$

14.- $\frac{1}{2} \operatorname{arctag}(x^2+4) + K$

15.- $\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} 2x^2 + K$

16.- $\frac{1}{2a^2} \operatorname{arctag} \frac{x^2}{a^2} + K$

17.- $-\frac{2(1-e^x)\sqrt{1-e^x}}{3} + K$

18.- $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + K$

19.- $\frac{\operatorname{tag}^3 x}{3} + K$

20.- $\frac{\sqrt[3]{x^3}}{5} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[3]{x} - \ln(\sqrt[3]{x}+1) + K$

21.- $\sqrt{e^x+1} \left[\frac{2}{3}(e^x+1) - 2 \right] + K$

22.- $\frac{3}{4} \sqrt{2x^2+1} + K$

23.- $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + K$

24.- $\frac{\operatorname{tag}^3 x}{5} + \frac{2\operatorname{tag}^3 x}{3} + \operatorname{tag} x + K$

25.- $x \cdot \sin x + \cos x + K$

26.- $\frac{2x\sqrt{x}(\ln x)^2}{3} - \frac{8x\sqrt{x} \ln x}{9} - \frac{16x\sqrt{x}}{27} + K$

27.- $\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{3} + K$

28.- $-e^{-x}(x^2+2x+2) + K$

29.- $\frac{x^3(\ln x)^3}{3} - \frac{x^3(\ln x)^2}{3} + \frac{2x^3 \ln x}{9} - \frac{2x^3}{27} + K$

30.- $\frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + k$

31.- $x \cdot \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + K$

32.- $x \cdot \operatorname{tag} x + \ln(\cos x) + K$

33.- $\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arctag} x - x + \operatorname{arctag} x) + K$

34.- $x \cdot \operatorname{tag} x + \ln(\cos x) - \frac{x^2}{2} + K$

$$35.- -5\ln(x-2)+22\ln(x-3)+K$$

$$37.- \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x + 14\ln(x+2) + 2\ln(x-2) + K$$

$$38.- 4\ln(x-1) - 7\ln(x+3) + 5\ln(x-4) + K$$

$$40.- \frac{7}{9}\ln(x-1) - \frac{20}{9}\frac{1}{x-1} + \frac{5}{3}\ln(x+2) + K$$

$$42.- \frac{1}{2}\operatorname{arctag}\left(\frac{x-2}{2}\right) + K$$

$$44.- \frac{1}{\cos x} + K$$

$$46.- \operatorname{arcsen} x - \sqrt{1-x^2} + K$$

$$48.- -\frac{1}{6}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x+3) + \frac{1}{2}\ln(x-2) + K$$

$$49.- \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{2} [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) - \cos(\operatorname{arcsen} x)] + K = \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{2} (x - \sqrt{1-x^2}) + K$$

$$50.- \frac{1}{2}\operatorname{arctag}\left(\frac{x+1}{2}\right) + K$$

$$52.- \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + K$$

$$54.- \frac{x^3}{3}\operatorname{arctag} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + K$$

$$56.- -\frac{3}{x-4} - \frac{7}{(x-4)^2} + K$$

$$58.- \frac{1}{9}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{9}\ln(x+2) + K$$

$$60.- x + 4\ln(x-1) - 2\ln(x+1) + K$$

$$62.- -\operatorname{arcsen} \frac{1}{x} + K$$

$$64.- 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + K$$

$$66.- 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + K$$

$$68.- \frac{1}{2}\ln \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} + K$$

$$69.- -\frac{1}{2}\ln(\ln x - 1) + \frac{1}{6}\ln(\ln x + 1) + \frac{1}{3}\ln(\ln x - 2) + K$$

$$36.- \frac{1}{5}\ln(x+3) + \frac{4}{5}\ln(x-2) + K$$

$$39.- \frac{3}{2}\ln(x^2-1)$$

$$41.- \frac{3}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + K$$

$$43.- \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctag} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + K$$

$$45.- 4\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{3} - 1 \right) + K$$

$$47.- \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + K$$

$$51.- \cos x - \cos x \cdot \ln(\cos x) + K$$

$$53.- \frac{1}{2}(\operatorname{tag} x + 1)^2 + K$$

$$55.- \sqrt{a^2 + x^2} + K$$

$$57.- \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x}-1) + K$$

$$59.- \operatorname{arcsen}(\operatorname{tag} x) + K$$

$$61.- \operatorname{arctag}(x+2) + K$$

$$63.- \frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} + K$$

$$65.- -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{cotag} x + x + K$$

$$67.- \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + K$$

EJERCICIOS DE INTEGRAL DEFINIDA

Calcular el área de los recintos limitados por las diferentes curvas y rectas en cada uno de los siguientes casos. Dibujar previamente dicho recinto.

01.- $f(x)=x+2$, $x=1$, $x=4$ e $y=0$.

Sol: $\frac{27}{2}$ u.d.s.

02.- $y=-x^2+7x-6$ y el eje OX.

Sol: $\frac{125}{6}$ u.d.s.

03.- $f(x)=x^2+2$, el eje OX, $x=1$ y $x=4$.

Sol: 27 u.d.s.

04.- $y=-x^2+5x-6$ y el eje de abscisas.

Sol: $\frac{73}{6}$ u.d.s.

05.- $f(x)=\operatorname{sen} x$, $x=0$ y $x=\frac{3\pi}{4}$.

Sol: $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ u.d.s.

06.- $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=2$ y el eje OX.

Sol: 0'69315 u.d.s.

07.- $f(x)=x^3$, $x=-1$, $x=2$ y el eje OX

Sol: $\frac{17}{4}$ u.d.s.

08.- $y=x^2-1$ e $y=x+1$

Sol: $\frac{9}{2}$ u.d.s.

09.- $y=x^2-4x$ e $y=-x^2+4x$

Sol: $\frac{64}{3}$ u.d.s.

10.- $y=x^2$ e $y=2-x^2$

Sol: $\frac{8}{3}$ u.d.s.

11.- $y=x^2$ e $y=-x^2+4$

Sol: $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ u.d.s.

12.- $xy=5$ e $x+y-6=0$

Sol: 3'9528 u.d.s.

13.- $y=x^3$ e $y=x$

Sol: $\frac{1}{2}$ u.d.s.

14.- $y=x^2-6x+5$ y el eje de abscisas.

Sol: $\frac{32}{3}$ u.d.s.

15.- $y=x^2+2$ e $y=x+4$

Sol: $\frac{9}{2}$ u.d.s.

16.- $y=x^3$ e $y=2x$

Sol: 2 u.d.s.

17.- $y=x^2-x$ e $y=3x-x^2$

Sol: $\frac{8}{3}$ u.d.s.

18.- $y=x^3$, $x=2$ y el eje OX.

Sol: 4 u.d.s.

19.- $y=x^2+4x+5$ e $y=5$

Sol: $\frac{32}{3}$ u.d.s.

20.- $y=x^2$ e $y=x+2$

Sol: $\frac{9}{2}$ u.d.s.

21.- $y = 3x - x^2$ e $y = x - 3$

Sol: $\frac{32}{3}$ u.d.s.

22.- $y = 2(1 - x^2)$ e $y = -1$

Sol: 3 u.d.s.

23.- $y = x^2$, $y = -x + 2$ y el eje OX

Sol: $\frac{5}{6}$ u.d.s.

24.- $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

Sol: $\frac{1}{3}$ u.d.s.

25.- $y = x^2$ e $y = x^3$

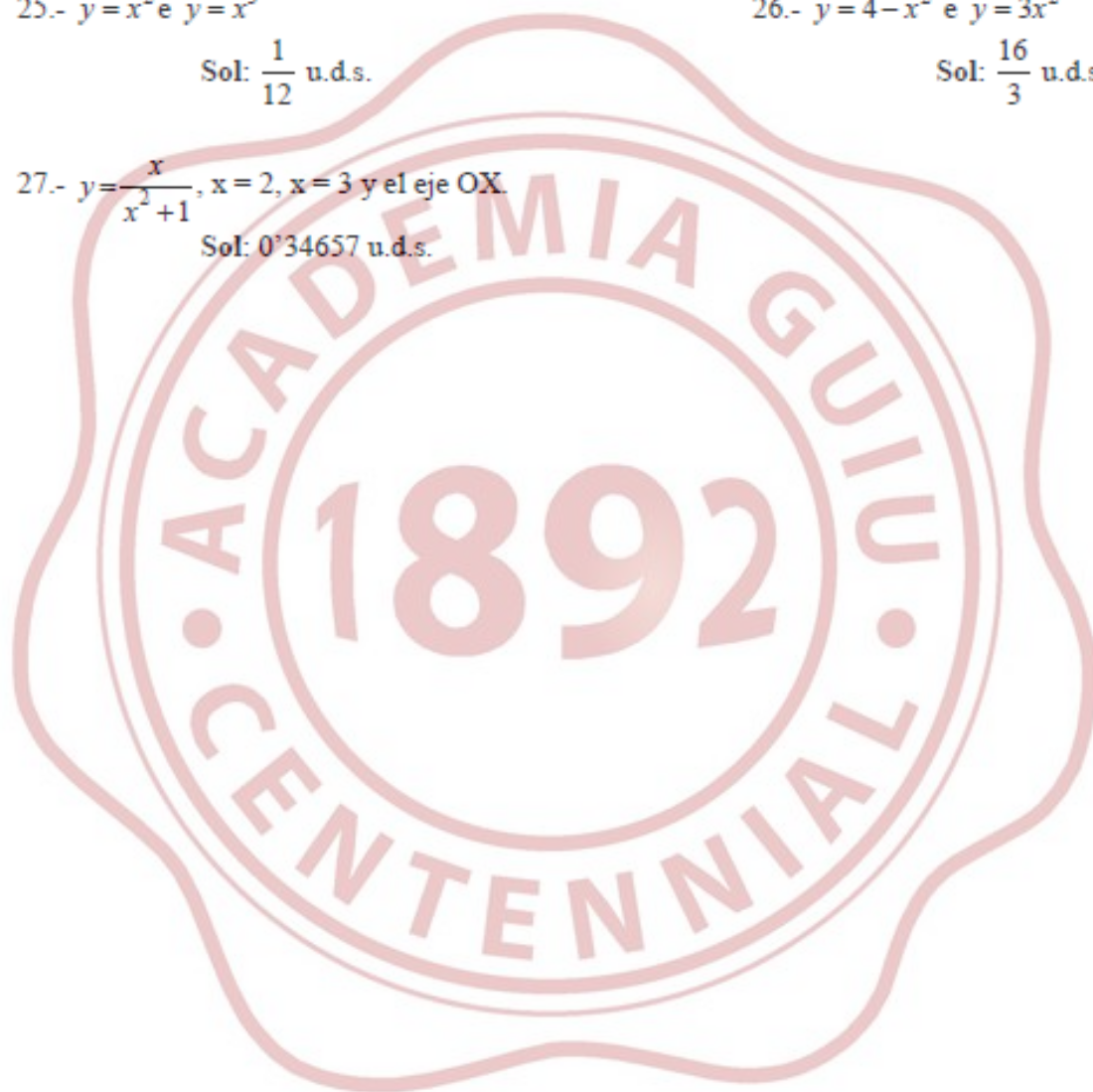
Sol: $\frac{1}{12}$ u.d.s.

26.- $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$

Sol: $\frac{16}{3}$ u.d.s.

27.- $y = \frac{x}{x^2 + 1}$, $x = 2$, $x = 3$ y el eje OX.

Sol: 0'34657 u.d.s.



Capítulo 1

COMBINATORIA

Previamente al estudio de la probabilidad en sí, conviene dedicar algún tiempo al repaso de las técnicas combinatorias.

Recordemos que la Combinatoria es la parte de las Matemáticas que se ocupa de la resolución de problemas de elección y disposición de los elementos de cierto conjunto, de acuerdo con ciertas reglas. Es decir, dentro de la Combinatoria es dónde tienen sentido preguntas del tipo:

1. ¿Cuántas quinielas distintas pueden hacerse?.
2. ¿Cuántas posibles combinaciones pueden darse en la lotería primitiva?.
3. ¿Qué posibilidades hay de que me toquen los cuatro ases en una mano de tute?.
4. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 asientos de un cine?.

Trataremos de dar respuesta a estas cuestiones y algunas más.

1.1. Conceptos fundamentales

En todo problema combinatorio hay varios conceptos claves que debemos distinguir:

1. Población: Es el conjunto de elementos que estamos estudiando. Llamaremos tamaño de la población al número de elementos de este conjunto.
2. Muestra: Es un subconjunto de la población. Llamaremos tamaño de la muestra al número de elementos que la componen.

Los diferentes tipos de muestra vienen determinados por dos aspectos:

- a) El orden, es decir, si es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no.
- b) La posibilidad de repetición o no de los elementos.

Ejemplo: Veamos con qué tipo de poblaciones y muestras trabajamos en los ejemplos anteriores:

1. La población en este caso es $\{1, X, 2\}$, que tiene tamaño 3 (no hay otras posibilidades en una quiniela).

Una quiniela (teniendo en cuenta el "pleno al 15") es una muestra de tamaño 15 de la población anterior (por ejemplo : 1XX121XXX212111).

Es evidente que el orden en esta muestra es importante (no es lo mismo una X en la segunda casilla que en la quinta) y que se permiten elementos repetidos (los unos , equis o doses se pueden repetir).

Es por tanto una muestra ordenada y con repetición.

2. En este caso la población es mayor, pues son todos los números desde el 1 al 49, es decir $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$.

Por tanto, y si nos olvidamos del complementario, una apuesta de lotería primitiva es una muestra de tamaño 6 de dicha población (por ejemplo 3, 18, 40, 41, 43, 45).

Aquí el orden no influye y los elementos no se pueden repetir (no puede salir un número más de una vez). Son muestras no ordenadas y sin repetición.

3. La población ahora está formada por las 40 cartas que componen una baraja española, es decir $\{1 \text{ oros}, 2 \text{ oros}, \dots, \text{Rey bastos}\}$, y para el caso de 4 jugadores, tenemos una muestra de 10 cartas, que evidentemente no se pueden repetir y además el orden no importa.

Muestras no ordenadas y sin repetición.

4. La población son las 5 personas a elegir, y la muestra tiene el mismo tamaño, 5, pues elegimos a las 5 personas. Eso sí, ahora el orden sí que es importante y además las personas no se pueden repetir.

Son muestras ordenadas y sin repetición.

5. Un ejemplo de muestra no ordenada y con repetición podría ser una mano de cartas pero teniendo en cuenta que jugamos con 2 barajas idénticas mezcladas (80 cartas).

Si se reparten 10 a cada uno de 4 jugadores, tenemos una muestra de tamaño 10 en la que es evidente que el orden no importa y que podemos tener cartas repetidas (por ejemplo, dos caballos de oros).

El objetivo de la Combinatoria es calcular cuántos tipos de muestras de un determinado tamaño se pueden extraer de cierta población. El resultado en el que nos basaremos a la hora de calcular el número de muestras es el siguiente:

Principio de multiplicación:

Si un procedimiento se puede separar en r etapas, de modo que el resultado de una de ellas no influye en el resultado de las otras, y en cada una de estas etapas se obtienen respectivamente $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ resultados, entonces el procedimiento global conduce a $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_r$ resultados.

Ejemplo: ¿Cuántos resultados podemos obtener al lanzar una moneda tres veces?.

Aplicando el principio anterior, en el primer lanzamiento obtenemos 2 resultados (Cara o cruz), en el segundo lanzamiento, otros 2 y en el tercero también 2.

Por tanto, en total hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibles resultados. Si lo disponemos en forma de diagrama de árbol, obtenemos los 8 resultados:

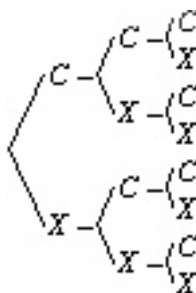


Figura 1.1: Diagrama de árbol

1.2. Muestras ordenadas

1.2.1. Muestras ordenadas sin repetición

Si tenemos una población de tamaño n y queremos extraer una muestra ordenada y sin repetición de tamaño k ($k < n$), razonemos de este modo:

El primer elemento lo podemos elegir entre n elementos.

El segundo, al no poder repetir, podemos elegirlo entre $n - 1$ elementos.

⋮

El elemento k , lo podremos elegir entre $n - k + 1$ elementos.

Por tanto, y aplicando el principio de multiplicación en total hay :

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

muestras de tamaño k ordenadas y sin repetición.

Ejemplos:

1. ¿De cuántas formas se pueden elegir 2 cartas, extraídas sucesivamente y sin repetir, de una baraja española?

La primera se puede elegir de 40 formas.

La segunda, al no poder repetir, sólo se puede elegir de 39 maneras.

Por tanto, en total hay $40 \cdot 39 = 1560$ posibilidades.

2. Seis ciclistas llegan al sprint en una prueba de la Olimpiadas, ¿De cuántas maneras se pueden colocar los tres primeros puestos?.

Para el primer puesto hay 6 posibilidades.

Para el segundo, sólo 5 posibilidades.

Para el tercero, quedan 4 opciones.

Por tanto hay en total $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneras.

Las muestras ordenadas y sin repetición se denominan **Variaciones sin repetición**. Por tanto, si el tamaño de la población es n y el de la muestra k , el número de variaciones sin repetición lo expresaremos por:

$$V_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

(notemos que k , tamaño de la muestra indica el número de factores que hay que multiplicar, por ejemplo, en los ejemplos anteriores, en el primero las muestra eran de tamaño 2 y multiplicábamos 2 factores, y en el segundo eran muestras de tamaño tres y multiplicábamos tres factores).

Ejercicio: ¿Cuántos números de cuatro cifras no repetidas se pueden formar con las cifras del 1 al 9 (ambas inclusive)?

1.2.2. Permutaciones

En el caso particular de que se tome una muestra de tamaño igual al tamaño de la población, es decir, $k = n$, las variaciones se denominan permutaciones y se obtendría:

$$V_n^n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - n + 1) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

El producto de todos los números enteros desde el 1 hasta el n se denomina factorial de n y se representa por $n!$. Por definición, $0!=1$ y $1!=1$. Evidentemente no existen los factoriales de los números negativos (Si intentásemos calcular, por ejemplo $(-4)!$, por definición deberíamos escribir:

$$(-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

, es decir, el 0 siempre aparecería en un factorial de un entero negativo, y dicho factorial sería siempre 0. No tiene sentido, por tanto, calcular el factorial en este caso).

Por tanto este caso particular de variaciones sin repetición se denomina permutaciones sin repetición de n elementos y se expresa:

$$P_n = n!$$

Ejemplo: ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas en 5 asientos en un cine?.

La primera persona se puede sentar en 5 sitios.

La segunda sólo en 4, la tercera en 3, la cuarta en 2 y la quinta en 1.

De modo que hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ posibilidades, es decir, $P_5 = 5! = 120$.

Ejercicio: ¿Cuántas palabras de 8 letras (con o sin sentido) se pueden formar con las letras A B C D E F G H?.

1.2.3. Permutaciones con elementos repetidos

Si queremos calcular el número de permutaciones de n elementos de los cuáles hay n_1 de una clase, n_2 de otra, etc... de modo que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, entonces hablamos de permutaciones de n elementos, algunos de los cuales están repetidos, lo que se expresa como:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

Ejemplo: Con las letras A A A B B, ¿cuántas palabras, con o sin sentido, pueden formarse?

La A se repite 3 veces y la letra B se repite 2 veces, y en total hay 5 letras. Así el número total de palabras son:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Dichas palabras serían: AAABB, AABAB, AABBA, ABAAB, ABABA, ABBA

Escribe los 4 restantes.

Ejercicio: Con 5 signos + y 3 signos - ¿Cuántas cadenas de símbolos se pueden formar?

1.2.4. Muestras ordenadas con repetición

Si la población es de tamaño n y la muestra de tamaño k , pero ahora permitimos repeticiones, procedemos así:

El primer elemento se puede elegir de n maneras.

Como podemos repetir, el segundo también se puede elegir de n maneras.

⋮

El elemento número k se puede elegir de n maneras.

En total tendremos $n \cdot n \cdot \dots \cdot n$ (k veces) $= n^k$ muestras de este tipo.

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 2 cartas (no necesariamente distintas de una baraja de 40 cartas)?.

La primera se puede elegir de 40 maneras.

La segunda, al poder repetir, también se puede elegir de 40 maneras.

En total hay $40 \cdot 40 = 1600$ formas.

2. ¿De cuántas formas se puede entregar el Premios al primer clasificado, al segundo, al tercero, y al cuarto entre 5 películas diferentes en un festival de cine?

El primer Premio se puede dar de 5 maneras, el segundo también, el tercero también y el cuarto también.

Por tanto hay $5^4 = 625$ posibilidades.

Las muestras ordenadas y con repetición se denominan Variaciones con repetición y lo expresaremos:

$$VR_n^k = n^k$$

Ejercicio: ¿Cuántos números de tres cifras (no necesariamente distintas) pueden formarse con los dígitos 1,6,7,8,9?.

1.3. Muestras no ordenadas

1.3.1. Muestras no ordenadas y sin repetición

Para estudiar este caso, es conveniente fijarse en un ejemplo.

Supongamos que tenemos una bolsa con 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sacamos dos bolas, sin importarnos el orden y sin repetir, ¿cuántos posibles resultados hay?.

Examinemos las posibilidades. Si el orden fuese importante ya sabemos que tendríamos $5 \cdot 4 = 20$ posibilidades ($V_5^2 = 5 \cdot 4$) que serían:

1, 2	1, 3	1, 4	1, 5
2, 1	2, 3	2, 4	2, 5
3, 1	3, 2	3, 4	3, 5
4, 1	4, 2	4, 3	4, 5
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4

Ahora bien, como no nos importa el orden, para nosotros las parejas 2,1 y 1,2 que son 2, en realidad sólo deberían contar como una, y lo mismo ocurre con el resto de parejas.

Estamos contando cada pareja 2 veces. Por tanto, para obtener el número de parejas que buscamos tenemos que dividir entre 2. Así resulta que el número de muestras no ordenadas y sin repetición que tenemos es de: $\frac{20}{2} = 10$, sólo 10 posibilidades que son:

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$

donde las llaves indican que el orden no importa.

Si sacásemos 3 bolas en lugar de 2, tendríamos los tríos: 1,2,3 1,2,4 1,2,5 etc... en total $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades ($V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$).

Razonando de igual manera al caso anterior, todos aquellos tríos en los que estuviesen por ejemplo, el 1, el 2 y el 3 estarían repetidos. Ahora bien, ¿cuántas veces se repite cada trío?. Veamos, tomando como ejemplo los tríos con 1,2 y 3 obtenemos: 1,2,3 1,3,2 2,1,3 2,3,1 3,1,2 3,2,1 6 posibilidades ($P_3 = 3!$) que en realidad representan lo mismo pues no nos importa el orden. Lo mismo ocurre con cada trío, de modo que cada uno de ellos se repite 6 veces, así pues si no tenemos en cuenta el orden, el número de muestras no son 60 sino: $\frac{60}{6} = 10$ maneras (no ordenadas y sin repetición).

Ejercicio: Escribir los 10 tríos del ejemplo anterior.

Formalizando lo anterior, si la población es de tamaño n y se extraen muestras de tamaño k , si fuesen ordenadas serían

$$V_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

pero como son no ordenadas tenemos que dividir por el número de maneras de ordenar esas muestras de tamaño k , es decir hay que dividir por

$$P_k = k!$$

Resumiendo, el número de muestras no ordenadas y sin repetición de tamaño k que se extraen de una población de tamaño n es:

$$\frac{V_n^k}{P_k}$$

Las muestras no ordenadas y sin repetición se denominan Combinaciones sin repetición y las expresaremos:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}$$

El número de combinaciones sin repetición C_n^k se recuerda de manera más sencilla mediante otra fórmula:

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

La expresión $\binom{n}{k}$ se denomina número combinatorio y se lee "n sobre k".

Una regla sencilla que permite calcular este número combinatorio es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden sacar 3 bolas numeradas en cualquier orden, de una bolsa que contiene 5 bolas?.

Serían combinaciones de 5 elementos de los que sacamos 3, es decir, tenemos que calcular:

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

son las maneras que habíamos calculado en el ejemplo de la introducción.

2. ¿De cuántas formas se puede formar un grupo de trabajo de 6 alumnos de entre una clase de 27?.

En este caso son combinaciones (no importa el orden) de 27 elementos de los que se escogen 6, es decir:

$$C_{27}^6 = \binom{27}{6} = \frac{27!}{6! \cdot (27-6)!} = \frac{27!}{6! \cdot 21!} = 296010$$

(¡Compruébalo!).

Ejercicio: ¿De cuántas maneras se pueden extraer 6 bolas de un bombo que contiene 49 bolas? (Lotería Primitiva)

Hay algunos tipos más de muestras, en concreto las muestras no ordenadas con repetición, pero no se estudiarán en este momento.

Números combinatorios y factoriales en la calculadora

Las calculadoras científicas poseen algunas teclas útiles para el cálculo de factoriales y números combinatorios.

Para el factorial, se utiliza la tecla $!$, que suele encontrarse sobre alguna otra tecla, por lo que al utilizarla habrá que presionar antes la tecla SHIFT (o INV).

Dado que los factoriales crecen a una velocidad enorme, un calculadora normal sólo puede calcular hasta el factorial de 69, y ya si pretendemos calcular $70!$, se produce un mensaje de error.

Observemos que un número tan inofensivo como $13!$ ya tiene un valor de 6.227.020.800

Para el caso de los números combinatorios, algunas calculadoras poseen una función para calcularlos. Suele estar situada sobre la tecla de la división (depende mucho del modelo de calculadora). Dicha función es

$$\boxed{n \ C \ r}$$

y calcula el número combinatorio $\binom{n}{r}$, de modo que si queremos calcular $\binom{5}{3}$, basta con introducir el 5, luego SHIFT (o INV), posteriormente el 3 y luego presionar la tecla de = para obtener 10. (Ya lo habíamos calculado antes).

Evidentemente si alguna de estas funciones tiene una tecla propia en la calculadora, es decir, no está encima de otra, no es necesario presionar la tecla SHIFT (o INV) para operar con ella.



Capítulo 2

PROBABILIDAD

La probabilidad y la estadística son, sin duda, las ramas de las Matemáticas que están en mayor auge en este siglo, y tienen una tremenda aplicabilidad en todos los aspectos y ciencias, especialmente en las Ciencias Sociales, puesto que aquellas variables que influyen en dichas ciencias, económicas, demográficas, suelen tener carácter aleatorio, es decir, no son deterministas, y se fundamentan en predicciones a partir de datos conocidos. Todo aquello que implique predicción nos lleva al terreno de la probabilidad.

2.1. Experimentos aleatorios

En todos los aspectos de la vida a veces nos encontramos con acontecimientos predeterminados, es decir, tales que podemos decir el resultado de dichos acontecimientos antes de que finalice o incluso de que comience. Tal es el caso de:

1. Tirar una piedra desde un edificio (sabemos que se caerá).
2. Calentar un cazo de agua (sabemos que la temperatura sube).
3. Golpear una pelota (sabemos que se va a mover, e incluso conociendo fuerzas que actúan etc, podemos conocer precisamente dónde caerá).

Tales acontecimientos o experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen se denominan experimentos deterministas.

Sin embargo, analicemos otro tipo de experimentos, mucho más interesantes desde el punto de vista matemático:

Imaginemos que lanzamos un dado al aire (normal, de 6 caras y no trucado). ¿Podemos predecir el resultado que vamos a obtener?. Evidentemente no. Este es un experimento que no es determinista. A este tipo de experimentos, en los cuales no se puede predecir el resultado antes de realizar el experimento se les denomina experimentos aleatorios.

Otros ejemplos de experimentos aleatorios pueden ser:

Tirar una moneda al aire y observar qué lado cae hacia arriba, rellenar una quiniela de fútbol, jugar una partida de póker y, en general, cualquier juego en el que intervenga el azar.

2.2. Definiciones básicas

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro o relaciones parecidas. Con este fin, introduciremos algunas definiciones.

Si realizamos un experimento aleatorio, llamaremos *espacio muestral* del experimento al conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Al espacio muestral lo representaremos por E (o bien por la letra griega omega Ω).

A cada elemento que forma parte del espacio muestral se le denomina *suceso elemental*.

Ejemplo:

1. ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento de lanzar un dado normal al aire y observar la cara que queda hacia arriba?.

Evidentemente, en este caso hay 6 posibles resultados (6 sucesos elementales) y el espacio muestral estará formado por: $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.

2. ¿Y en el caso del lanzamiento de una moneda?

Entonces $E=\{C,X\}$

Ejercicios:

1. Escribir el espacio muestral asociado al experimento de sacar una carta de entre las diez del palo de copas de una baraja española.
2. Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y observar la pareja de números que se obtiene.
3. Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y sumar los números que se obtienen.

Llamaremos *suceso aleatorio* a cualquier subconjunto del espacio muestral. El concepto de suceso es fundamental en probabilidad. Dicho de forma simple, un suceso de un experimento aleatorio es cualquier cosa que se nos ocurra afirmar sobre dicho experimento.

Así, si tiramos una moneda dos veces, serían sucesos todos los siguientes:

1. Sale al menos una cara.
2. Salen más caras que cruces.
3. La moneda cae de canto.
4. No sale ninguna cruz.

Llamaremos *suceso imposible* al que no tiene ningún elemento y lo representaremos por $\emptyset$.

Llamaremos *suceso seguro* al formado por todos los posibles resultados (es decir, al espacio muestral).

Llamaremos *espacio de sucesos* y lo representaremos por S , al conjunto de todos los sucesos aleatorios.

Ejemplo:

1. En el caso del lanzamiento de la moneda en el que el espacio muestral era $E=\{C,X\}$, analicemos quién es el espacio de sucesos:

- Sucesos con 0 elementos: $\emptyset$
- Sucesos con 1 elemento: $\{C\}, \{X\}$
- Sucesos con 2 elementos: $\{C,X\}$

De modo que el espacio de sucesos es: $S=\{\emptyset, \{C\}, \{X\}, \{C,X\}\}$.

2. En el caso del lanzamiento de dos monedas, si haces el diagrama de árbol obtienes el siguiente espacio muestral:

$$E = \{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

El espacio de sucesos tiene ahora 16 elementos, que puedes intentar escribir, siguiendo el esquema anterior, desde los sucesos con 0 elementos hasta aquellos que tienen 4 elementos. Si describimos los sucesos que poníamos antes como ejemplos, obtenemos:

- a) Sale al menos una cara = $\{(C,C), (C,X), (X,C)\}$
 - b) Salen más caras que cruces = $\{(C,C)\}$
 - c) La moneda cae de canto = $\emptyset$
 - d) No sale ninguna cruz = $\{(C,C)\}$
3. En el caso del lanzamiento del dado el espacio de sucesos es mucho más amplio (64 elementos. Sería interesante que intentases escribirlos todos o al menos te dices cuenta de cómo son , aunque no los escribas todos)

En este mismo ejemplo, se puede considerar el suceso $A = \text{"sacar un número par"}$. ¿De qué sucesos elementales consta el suceso A ? Evidentemente, $A = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}\}$.

Otros sucesos pueden ser: $B = \text{"Sacar un número mayor que 5"} = \{\{6\}\}$.

$C = \text{"Sacar un número par y menor que 5"} = \{\{2\}, \{4\}\}$.

Ejercicio: Una urna contiene dentro 4 bolas de las cuales 2 son blancas, 1 roja y otra azul. Se saca una bola de la urna.

- a) Escribir el espacio muestral.
- b) Escribir los sucesos "no sacar bola azul" y "sacar bola roja o blanca".
- c) Escribir el espacio de sucesos.

Los sucesos admiten una representación gráfica que facilita su interpretación; del modo:

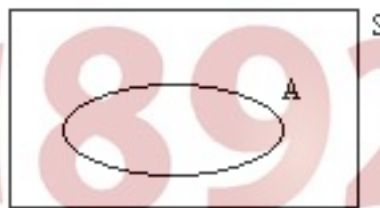


Figura 2.1: Representación en diagrama de Venn del suceso A

Por ejemplo, en el caso del dado:

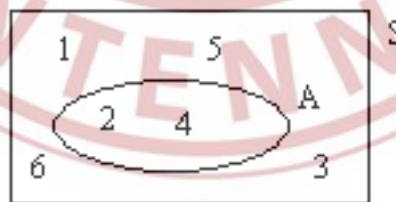


Figura 2.2: Representación en diagrama de Venn para un dado

$A = \text{"salir par y menor que 5"}$. Estos diagramas se denominan diagramas de Venn.

Propiedad:

Si el espacio muestral tiene n elementos, el espacio de sucesos tiene 2^n elementos.

Ejemplo:

En el caso del dado, el espacio muestral tenía 6 elementos y el espacio de sucesos tiene $2^6 = 64$ elementos.

En el caso de la moneda, el espacio muestral tenía dos elementos y el espacio de sucesos tiene $2^2 = 4$ elementos.

2.3. Operaciones con sucesos

Si realizamos un experimento aleatorio y consideramos varios sucesos A , B , C , etc, asociados a dicho experimento, podemos realizar varias operaciones entre ellos. Los más importantes son:

1. Igualdad de sucesos: Dos sucesos A y B son iguales si están compuestos por los mismos elementos. Lo expresaremos por $A = B$.
2. Intersección de sucesos: Llamaremos *suceso intersección* de los sucesos A y B , y lo representaremos por $A \cap B$, al suceso “ocurren A y B a la vez”.

Ejemplo: Si tiramos un dado, ya sabemos que el espacio muestral asociado es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sean los sucesos $A = \text{“sacar un n}^\circ \text{ par”} = \{2, 4, 6\}$, y $B = \text{“sacar un número entre 2 y 4 (inclusive)”} = \{2, 3, 4\}$.

El suceso $A \cap B$ es tal que ocurren A y B a la vez, es decir:

$A \cap B = \text{“sacar un n}^\circ \text{ par y que esté entre 2 y 4 (inclusive)”} = \{2, 4\}$.

El suceso $A \cap B$ son los elementos comunes a los conjuntos A y B (elementos que están en los dos conjuntos).

Representado en diagramas de Venn:

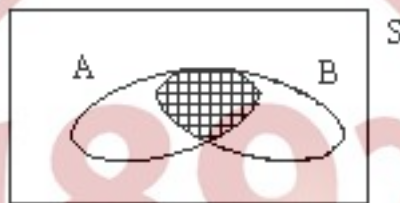


Figura 2.3: Intersección de sucesos: $A \cap B$

En ocasiones podremos encontrarnos con sucesos que NO tengan elementos en común. En estos casos se dice que los sucesos A y B son *incompatibles*, y su intersección se representa con el conjunto vacío:

$$A \cap B = \emptyset$$

Evidentemente, si los sucesos sí tienen intersección, diremos que son *compatibles*.

3. Unión de sucesos: Llamaremos *suceso unión* de los sucesos A y B y se representa por $A \cup B$ al suceso “ocurre A o bien ocurre B o bien ocurren ambos a la vez” (también podemos decir que “ocurre alguno”).

Es decir $A \cup B$ son los elementos que están en ambos conjuntos (aunque no necesariamente en los dos a la vez). Representado en diagrama de Venn:

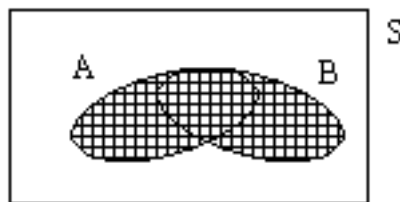


Figura 2.4: Unión de sucesos: $A \cup B$

Ejemplo: En el caso anterior:

$A \cup B =$ "sacar un n° par o un n° que esté entre 2 y 4 (inclusive)" $= \{2, 3, 4, 6\}$.

NOTA:

Observemos que la intersección de dos conjuntos siempre es "menor" que la unión, de hecho es "menor" que el propio conjunto.

Escrito matemáticamente:

$$A \cap B \subset A \cup B \quad A \cap B \subset A \quad A \cap B \subset B \quad A \subset A \cup B \quad B \subset A \cup B$$

(El símbolo $\subset$ significa "contenido", o que el primer conjunto es un subconjunto del segundo)

4. Suceso contrario de otro: Dado un suceso A , denominaremos *suceso contrario* de A y se representará por $\bar{A}$ (o bien A' o bien A^c) al suceso que tiene por elementos a todos aquellos que no pertenecen a A .

Ejemplo: Si tiramos un dado, ya sabemos que el espacio muestral asociado es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Como antes, los sucesos $A =$ "sacar un n° par" $= \{2, 4, 6\}$, por tanto $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ y $B =$ "sacar un número entre 2 y 4 (inclusive)" $= \{2, 3, 4\}$, de modo que $\bar{B} = \{1, 5, 6\}$.

En un diagrama de Venn:

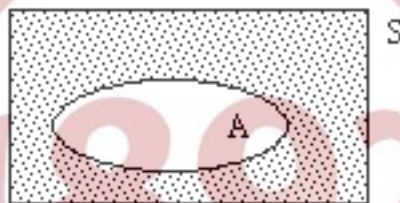


Figura 2.5: La parte punteada es $\bar{A}$. (Todo lo que no está incluido en A)

5. Diferencia de sucesos: Si A y B son dos sucesos, llamaremos diferencia entre A y B al suceso $B - A$, que consta de los elementos que están en B pero no están en A . Por ejemplo, si $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, tenemos que $B - A = \{3\}$. Se cumple que $B - A = B - A \cap B$, y también que $B - A = \bar{A} \cap B$. Representado en un diagrama de Venn:

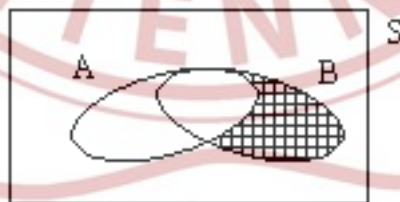


Figura 2.6: La parte rayada es $B - A$, todos los elementos de B que no estén en A

De todas formas, hemos de ser cuidadosos con esta operación: No se debe confundir con una simple resta como operación numérica, sino que es una diferencia conjuntista, quitar los elementos comunes a dos conjuntos.

Ejercicio: En una urna tenemos 9 bolas numeradas del 1 al 9. Sacamos una y anotamos su número. Sean los sucesos: $A =$ "sacar un n° primo" $B =$ "sacar un n° cuadrado" (por ejemplo 4 es un número cuadrado, porque $4 = 2^2$). Se pide:

- Describir el espacio muestral.
- ¿Cuántos elementos tiene el espacio de sucesos?.

- c) Calcula $A \cap B$ y $A \cup B$.
d) ¿Son A y B compatibles o incompatibles?.
e) Calcula $\bar{A}$ y $\bar{B}$.
f) Si C = “sale un número impar”, calcula $A \cap C$, $B \cap C$, $\bar{C}$, $A \cup C$, $\bar{A} \cap \bar{C}$.

Propiedades de las operaciones con sucesos:

Las operaciones con sucesos tienen las siguientes propiedades, la mayoría de ellas bien conocidas:

	Intersección	Unión
Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Asociativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotente	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Simplificación	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Elemento neutro	$A \cap E = A$	$A \cup \emptyset = A$
Absorción	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E = A$

Además de estas sencillas propiedades (que se demuestran fácilmente mediante un diagrama de Venn), las operaciones con sucesos tienen otras dos propiedades muy importantes:

Leyes de De Morgan: Si A y B son dos sucesos, se verifican:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Demostración: Demostraremos la primera de las igualdades.

En primer lugar, representemos en un diagrama de Venn $\overline{(A \cup B)}$. Para ello, primero representamos $A \cup B$, y luego su contrario $\overline{(A \cup B)}$:

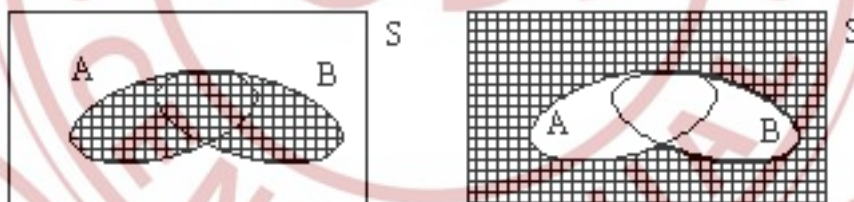


Figura 2.7: Imagen 1 corresponde a $A \cup B$. Imagen 2 corresponde a $\overline{A \cup B}$

Ahora, representaremos en otro diagrama el otro miembro, es decir $\bar{A} \cap \bar{B}$. En primer lugar, representaremos $\bar{A}$, luego $\bar{B}$ y luego su intersección:

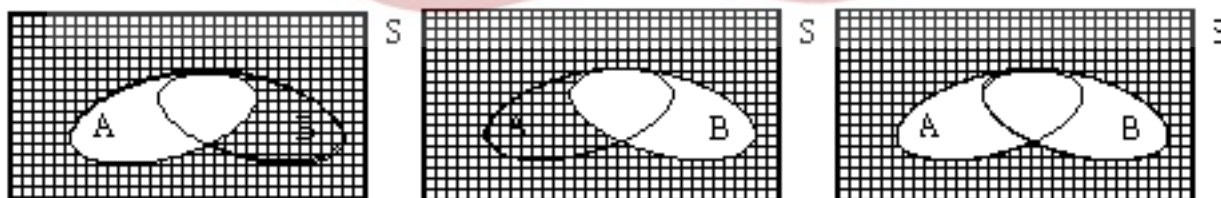


Figura 2.8: Imagen 1 corresponde a $\bar{A}$. Imagen 2 corresponde a $\bar{B}$. Imagen 3 corresponde a $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Observando los dos resultados, vemos que las partes rayadas son iguales, por lo que la igualdad es cierta.

Ejercicio:

1. Mediante un procedimiento similar, demostrar la segunda ley de De Morgan.
2. Luisa y María interviene en un torneo de ajedrez. La primera que gane dos partidas seguidas o tres alternas gana el torneo. Encuentra el espacio muestral con todos los resultados posibles (suponemos que nunca hacen tablas).
(Indicación: Utiliza un diagrama de árbol).
3. Consideramos el fenómeno aleatorio extraer una carta de una baraja de 40 y anotarla. Sean los sucesos $A = \text{"sacar oro"}$, $B = \text{"sacar rey"}$, $C = \text{"sacar el rey de bastos"}$.

Determina los sucesos:

$$A \cap \bar{C}, A \cap B \cap C, \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}, \bar{A} \cup \bar{B}$$

2.4. Asignación de probabilidades. Regla de Laplace

Hasta el momento hemos descrito lo que es un experimento aleatorio y hemos definido los conceptos básicos asociados a este experimento. Nos falta responder a esta pregunta: ¿Cómo asignar probabilidades a cada uno de los sucesos de un experimento aleatorio?

Hay muchas maneras de asignar probabilidades. La más sencilla e intuitiva la dio el matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827), quien enunció la regla que lleva su nombre:

Regla de Laplace:

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, entonces si A es un suceso, la probabilidad de que ocurra el suceso A es:

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo: Lanzamos un dado normal al aire. Consideramos el suceso $A = \text{"sale par"}$. Calcular $p(A)$.

Casos posibles hay 6, pues $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Casos favorables al suceso $A = \{2, 4, 6\}$.

Por tanto $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0'5$.

(Notemos que la probabilidad siempre es un número positivo y menor, o a lo sumo igual a 1).

El inconveniente que plantea la definición de Laplace es que necesariamente los sucesos elementales tienen que tener la misma probabilidad de ocurrir.

Observemos un caso tan sencillo como el siguiente:

De una urna que contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea :

- a) roja
- b) verde
- c) amarilla

El espacio muestral en este caso sería: $E = \{R, V, A\}$, que consta sólo de tres elementos, pero sería un poco ingenuo asignar las probabilidades mediante la regla de Laplace,

$$p(R) = \frac{1}{3} \quad p(V) = \frac{1}{3} \quad p(A) = \frac{1}{3}$$

porque ya intuitivamente se ve que hay más posibilidades, por ejemplo, de que salga una bola roja que de que salga una bola amarilla, de modo que ¿cómo asignar probabilidades?

Fue el matemático ruso Kolmogorov quién precisó este término:

Definición axiomática de probabilidad:

Una probabilidad p es una función que asocia a cada suceso A del espacio de sucesos S , un número real $p(A)$, es decir: $p : S \longrightarrow \mathbb{R}$, y que cumple las propiedades:

1. $0 \leq p(A) \leq 1$, (es decir, cualquier suceso tiene probabilidad positiva y menor o igual que 1).
2. $p(E) = 1$ (la probabilidad del suceso seguro es 1).
3. Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \emptyset$, entonces $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. (es decir la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades si los sucesos tienen intersección vacía).

Ejemplo:

Sea un experimento aleatorio cualquiera y definamos en S (espacio de sucesos) la siguiente probabilidad:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos del conjunto } A}{\text{número total de elementos}}$$

Comprobemos que p es una probabilidad.

Para ello, comprobemos las tres propiedades:

a) Se ve que la probabilidad de cualquier suceso está entre cero y uno, puesto que cualquier conjunto que tenga elementos ya tendrá probabilidad positiva, y el número de elementos de cualquier conjunto no puede ser mayor que el número total de elementos existentes.

b) $p(E) = 1$, es evidente.

c) Tomemos dos sucesos A y B que no tengan elementos en común. Entonces:

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= \frac{\text{elementos que forman parte de } A \text{ o de } B}{\text{número total de elementos}} = \\ &= \frac{\text{número de elementos de } A + \text{número de elementos de } B}{\text{número total de elementos}} = p(A) + p(B) \end{aligned}$$

puesto que si A y B no tienen elementos comunes, el número de elementos de la unión es la suma de los elementos de cada conjunto por separado.

Por tanto se cumplen las 3 propiedades y p así definida es una probabilidad. Esta será la definición de probabilidad que utilizemos a partir de ahora.

Ejemplo:

En el ejemplo de las urnas anterior, lo lógico es definir la probabilidad así: Como en total hay 20 bolas y 8 son rojas, 7 verdes y 5 amarillas, $p(R) = \frac{8}{20}$ $p(V) = \frac{7}{20}$ $p(A) = \frac{5}{20}$.

Se puede comprobar que así definida p es una probabilidad.

Sin embargo, comprobar las propiedades de la definición de Kolmogorov es una labor larga y engorrosa, puesto que hay que verificar que se cumple para todos aquellos sucesos del espacio de sucesos S , que es ciertamente amplio en muchas ocasiones. El siguiente resultado simplifica la tarea de decidir cuándo una función p sobre el espacio de sucesos es una probabilidad, basándose sólo en los sucesos elementales, es decir, aquellos que forman parte del espacio muestral. Lo enunciaremos sin demostración:

Propiedad

Si $w_1, w_2, \dots, w_n$ son los n sucesos elementales de un suceso aleatorio cualquiera, p una función $p: S \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que cumple las propiedades:

1. $0 \leq p(w_i) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
2. $p(w_1) + p(w_2) + \dots + p(w_n) = 1$

Entonces p es una probabilidad.

Ejemplo: Comprobar si las siguientes funciones definidas para los sucesos elementales son probabilidad, siendo $E = \{a, b, c, d\}$ el espacio muestral del experimento aleatorio:

$$a) \quad p(a) = \frac{1}{2}, p(b) = \frac{1}{3}, p(c) = \frac{1}{4}, p(d) = \frac{1}{5}$$

Es obvio que la primera propiedad se cumple, puesto que las 4 probabilidades son números positivos menores que 1.

Para ver si se cumple la segunda, basta realizar la suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{30 + 20 + 15 + 12}{60} = \frac{77}{60}$$

que evidentemente NO es 1, luego p NO es probabilidad.

$$b) \quad p(a) = \frac{1}{4}, p(b) = \frac{1}{2}, p(c) = 0, p(d) = \frac{1}{2}$$

Es obvio que la primera propiedad se cumple, puesto que las 4 probabilidades son números positivos o cero menores que 1.

Para ver si se cumple la segunda, basta realizar la suma:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1 + 2 + 1}{4} = 1$$

luego p SÍ es probabilidad.

Consecuencias de la definición de probabilidad:

1. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

En efecto, puesto que $E = A \cup \bar{A}$ y además A y $\bar{A}$ son incompatibles, resulta por la propiedad 3) de la definición que

$$p(E) = p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$$

Y por la propiedad 2), $p(E)=1$, luego $1 = p(A) + p(\bar{A})$ y por tanto $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

2. $p(\emptyset) = 0$

Como $\bar{E} = \emptyset$, resulta que:

$$p(\bar{E}) = p(\emptyset) = 1 - p(E) = 1 - 1 = 0$$

3. Si A y B son dos sucesos cualesquiera,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4. Si A , B y C son tres sucesos cualesquiera,

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo:

Se tira una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de obtener alguna cara.

Los problemas de este tipo, en los que se pide la probabilidad de obtener “alguna” cosa, se suelen resolver muy bien por paso al complementario. En este caso concreto, A = “obtener alguna cara”.

$\bar{A}$ = “no obtener ninguna cara” = “obtener 3 cruces”.

Entonces, $p(A) = \frac{1}{8}$, pues hay 8 casos posibles ($2 \cdot 2 \cdot 2$, ¡haz el diagrama de árbol!) y sólo uno favorable (XXX, 3 cruces), por tanto:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Ejercicio:

Calcular la probabilidad de obtener al menos 1 seis si se lanza 4 veces un dado.

Ejemplo:

Se lanza un dado dos veces y se suman las dos caras. Sea A el suceso A = “la suma de resultados es mayor o igual que 10” y B = “la suma de los resultados es múltiplo de 6”. Calcular $p(A)$, $p(B)$ y $p(A \cap B)$.

Hay 36 posibles resultados al lanzar dos veces un dado. ¿Cuántos de ellos suman 10 o más?

Que sumen 10: (4,6), (5,5), (6,4)

Que sumen 11: (5,6), (6,5)

Que sumen 12: (6,6)

Por tanto, $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

¿Cuántos hay que sumen múltiplo de 6?

Que sumen 6: (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)

Que sumen 12: (6,6)

Por tanto, $p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

En cuanto a $A \cap B = (6, 6)$, luego $p(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Ejercicios:

- Se ha encargado la impresión de una encuesta a una imprenta, que imprime 12 folios defectuosos de cada 1000. Hallar la probabilidad de que elegido un folio de la encuesta al azar:
 - Esté mal impreso.
 - Esté correctamente impreso.
- Una bolsa contiene 8 bolas numeradas. Se extrae una bola y anota su número. Sean los sucesos A = “salir par”, B = “salir impar”, C = “salir múltiplo de 4”.
Calcular las probabilidades de $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$.
- Extraemos una carta de una baraja española. Calcula:
 - La probabilidad de que sea un rey o un as.
 - La probabilidad de que sea un rey o una copa.
 - La probabilidad de que sea un rey y una copa.
- En el banquete posterior a una boda se sientan en la presidencia 10 personas, entre los cuales se encuentran los novios. Calcular la probabilidad de que los novios estén juntos en el centro de la mesa.

2.5. Probabilidad condicionada

Hasta ahora nos hemos limitado a calcular probabilidades únicamente partiendo de un experimento aleatorio, sin tener más información. Pero, ¿qué ocurre si conocemos alguna información adicional?.

Supongamos que estamos realizando el experimento aleatorio de lanzar un dado y obtener el número que sale. Consideremos el suceso $A = \text{"sale un 4"}$. Evidentemente, $p(A) = \frac{1}{6}$.

Ahora bien, ¿variaría esta probabilidad si al lanzar el dado alguien pasa por allí y nos dice que ha salido un número par?.

Disponemos entonces de una información adicional, $B = \{2, 4, 6\}$.

Hemos reducido nuestro espacio muestral, que ahora sólo consta de 3 elementos y tenemos que cambiar las probabilidades asignadas.

Ahora el suceso A no tiene una posibilidad entre 6 de ocurrir, sino una entre tres, es decir, $p(A) = \frac{1}{3}$.

Esta es la idea de la probabilidad condicionada: La información obtenida B , modifica la probabilidad de A . Lo expresaremos así: $p(A/B) = \frac{1}{3}$ y se lee "probabilidad de A condicionada a B " o "probabilidad de A conociendo B ".

El caso anterior es muy sencillo, pues directamente podemos calcular $p(A/B)$, pero si el espacio muestral se amplía, el problema es más complicado. La fórmula siguiente simplifica el problema.

Definición:

Sea A un suceso aleatorio asociado a un experimento aleatorio, y sea B otro suceso que sabemos que se ha realizado.

Llamaremos *probabilidad de A condicionada a B* y lo expresaremos por $p(A/B)$ a la expresión:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

(de idéntico modo se define $p(B/A)$, escribe la fórmula).

Ejemplo: Para el caso anterior,

$$A = \{4\}, B = \{2, 4, 6\} \longrightarrow p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = \{4\} \longrightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Luego:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

es lo mismo que obteníamos antes directamente.

Ejercicios:

1. Calcula la probabilidad de que la suma de las caras de dos dados sea mayor a igual que 10 sabiendo que en el primer dado ha salido un seis.
2. Se lanzan dos dados: ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a siete?
Si la suma de puntos ha sido 7, ¿cuál es la probabilidad de que en alguno de los dados haya salido un 3?

2.6. Sucesos independientes

Si bien el conocer cierta información adicional modifica la probabilidad de algunos sucesos, puede ocurrir que otros mantengan su probabilidad, pese a conocer dicha información.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, consideremos los sucesos: $A =$ “sacar un número par” y $B =$ “sacar un número menor o igual que 2”. Es claro que $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2\}$.

Calculemos la probabilidad de A conociendo que se ha realizado el suceso B , es decir, $p(A/B)$.

Utilizando la fórmula:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0'5$$

puesto que $p(A \cap B) = p(\text{sacar par y menor o igual que 2}) = \frac{1}{6}$ y $p(B) = \frac{1}{3}$.

Pero si no conociésemos la información B , ¿cuál sería la probabilidad de A ?

$p(A) = p(\text{sacar par}) = \frac{3}{6} = 0'5$, es decir que $p(A/B) = p(A)$, y por tanto el conocer la información B no modifica la probabilidad de A .

Cuando esto ocurre es decir, cuando $p(A/B) = p(A)$, diremos que los sucesos A y B son *independientes* (el hecho de que ocurra B no modifica la probabilidad de A).

Propiedad:

$$A \text{ y } B \text{ son sucesos independientes} \iff p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Demostración: $\implies$) Si A y B son independientes, $p(A/B) = p(A)$, y por la fórmula de la probabilidad condicionada, $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, luego $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$, y por tanto $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

$\impliedby$) Partiendo de $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$, entonces

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \cdot p(B)}{p(B)} = p(A)$$

luego $p(A/B) = p(A)$ y por tanto A y B son independientes.

Ejemplo:

En el caso anterior, $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$, y por otra parte $p(A) = \frac{1}{2}$ y $p(B) = \frac{1}{3}$, luego se cumple que

$$p(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = p(A) \cdot p(B)$$

luego A y B son independientes.

Ejercicio:

De dos sucesos conocemos que $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$ y $p(A) = \frac{1}{5}$, calcula $p(A \cap B)$ y $p(B)$ para que A y B sean independientes.

(Indicación: Utilizar la fórmula de la unión de dos sucesos y la de la independencia de sucesos).

(Solución: $p(B) = \frac{7}{12}$, $p(A \cap B) = \frac{7}{60}$).

NOTA IMPORTANTE:

No se deben confundir los conceptos de sucesos incompatibles y sucesos independientes. Dos sucesos son incompatibles cuando no tienen elementos en común, es decir, $A \cap B = \emptyset$, o con diagramas de Venn:



Figura 2.9: A y B incompatibles, sin elementos en común.

Dos sucesos son independientes si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Son conceptos totalmente distintos. Uno se refiere a CONJUNTOS y otro se refiere a PROBABILIDADES.

2.7. Experimentos compuestos. Teorema de la probabilidad total.

Un experimento compuesto es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples. Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un experimento compuesto.

Propiedad:

De la fórmula para calcular la probabilidad condicionada se deduce inmediatamente que:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) \quad \text{y} \quad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

Ejemplo: Se extraen 2 cartas, sucesivamente, de una baraja de 40. Calcular la probabilidad de extraer 2 sotas.

Sea A = “sacar sota en la 1ª” y B = “sacar sota en la 2ª”.

Nos piden $p(A \cap B)$.

Según la fórmula anterior, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$.

Ahora bien, $p(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ y $p(B/A) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$, por lo que $p(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{130}$.

La forma más sencilla de calcular probabilidades en experimentos compuestos es un digrama de árbol, donde en cada rama situamos la probabilidad que le corresponde al suceso del final de dicha rama. Estas probabilidades que se van poniendo en el árbol son probabilidades condicionadas, porque dependen de los resultados anteriores.

En el caso del ejercicio anterior, el diagrama sería:

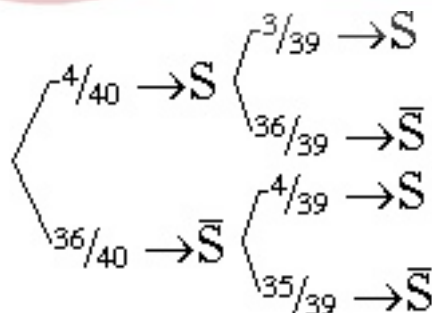


Figura 2.10: Diagrama de árbol para la extracción de sota(S) u otra carta ($\bar{S}$)

Nota:

Este mismo resultado se podría haber obtenido sin usar la probabilidad condicionada, del modo:

Formas de elegir 2 cartas de entre 40 = $\binom{40}{2}$.

Formas de elegir 2 sotas entre 4 = $\binom{4}{2}$.

Por la regla de Laplace, $p(\text{obtener 2 sotas}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{6}{780} = \frac{1}{130}$.

Ejercicios:

- Una urna contiene 9 bolas rojas y 5 negras. Se extraen sucesivamente 2 bolas. Calcula la probabilidad de que:
 - la primera bola sea roja y la segunda negra.
 - una sea roja y la otra negra.
- En una bolsa hay 4 canicas rojas, 4 azules y 2 verdes. Se extraen 3 canicas que resultan ser 2 rojas y una azul. Sin devolverlas a la bolsa se saca otra canica, ¿de qué color es más probable que salga?

Ejemplo:

Tenemos dos urnas, una con 7 bolas rojas y 2 azules, y otra con 3 bolas rojas y 8 azules. Tiramos un dado. Si nos sale un 3 o un 5, sacamos una bola de la primera urna y en caso contrario, sacamos una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea azul?

Evidentemente estamos realizando un experimento compuesto. En primer lugar, se trata de elegir una urna, para lo cual lanzamos un dado. Si U_1 = “elegir la urna 1” y U_2 = “elegir la urna 2”, es claro que $p(U_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y $p(U_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Por otra parte, luego realizamos otro experimento consistente en sacar una bola de la urna elegida. Si A = “sacar una bola azul”, las probabilidades que conocemos son:

$$p(A/U_1) = \frac{2}{9}$$

y

$$p(A/U_2) = \frac{8}{11}$$

Lo que nos piden es $p(A)$. Para calcular dicha probabilidad, si representamos el diagrama de árbol:

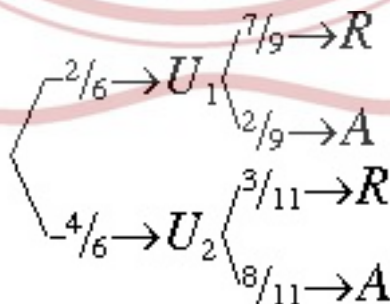


Figura 2.11: Diagrama de árbol para la extracción de bolas

Como la probabilidad de A depende de la urna en la que estemos, basta multiplicar las probabilidades de cada rama que llegue a la bola azul y luego sumar los 2 resultados, es decir:

$$p(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{11} = \frac{4}{54} + \frac{32}{66} = \frac{166}{297} = 0'559$$

La justificación teórica para proceder así la da el *teorema de la probabilidad total*.

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son sucesos incompatibles 2 a 2, y cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$), y B es otro suceso, resulta que:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

Nota: El conjunto $A_1, A_2, \dots, A_n$ que verifica la incompatibilidad 2 a 2 y que la unión de todos ellos es el espacio muestral se denomina *sistema completo de sucesos* y este sistema “divide el espacio muestral en partes que no se solapan”. Mediante representación gráfica:

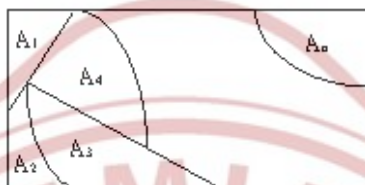


Figura 2.12: Sistema completo de sucesos: $A_1, A_2, \dots, A_n$

Ejemplo: Para el caso anterior, A_1 = “sacar la bola de la urna 1”.

A_2 = “sacar la bola de la urna 2”.

B = “sacar bola azul”.

Y aplicando el teorema:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{11} = \frac{4}{54} + \frac{32}{66} = \frac{166}{297} = 0'559$$

Ejemplo: En un colegio se imparten sólo los idiomas inglés y francés. El 80 % de los alumnos estudian inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos de inglés son socios del club musical del colegio y de los que estudian francés son socios de dicho club el 40 %. Se elige un alumno al azar. Calcular la probabilidad de que pertenezca al club musical.

En estos problemas es importante elegir el sistema completo de sucesos. En este caso: A_1 = “estudiar inglés”

A_2 = “estudiar francés”

B = “ser del club musical”

Nos piden $p(B)$. Por el teorema anterior:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) = \frac{80}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{8}{25} = 0'32$$

Mediante el diagrama de árbol:

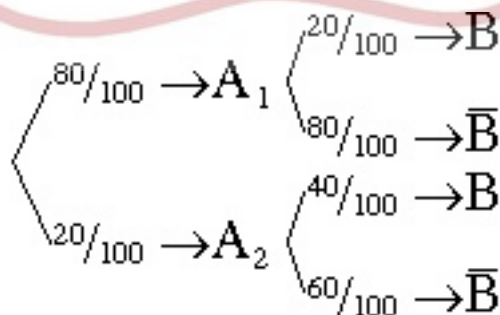


Figura 2.13: Diagrama de árbol para el problema de idiomas y club musical

Se obtiene el mismo resultado.

Ejercicio:

Se tienen dos urnas, la primera de las cuales tiene 6 bolas blancas, 4 negras y 2 rojas y la urna 2 tiene 3 bolas blancas y 7 negras.

Se lanza un dado al aire, y si sale múltiplo de 3 se saca de la primera urna y en otro caso se saca una bola de la segunda urna.

Calcular la probabilidad de que sea:

a) bola blanca b) bola negra c) bola roja.

Solución: $\frac{11}{30}, \frac{26}{45}, \frac{1}{18}$.

2.8. Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia están referidas a 2 características que presentan cada una dos o más sucesos.

Ejemplo: En un taller se sabe que acuden, por la mañana 3 automóviles con problemas de eléctricos, 8 con problemas mecánicos y 3 con problemas de chapa. Por la tarde hay 2 con problemas eléctricos, 3 con problemas mecánicos y 1 con problemas de chapa.

- Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde.
- Calcular el porcentaje de los que acuden con problemas mecánicos
- Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana.

Resumiendo los datos en una tabla de contingencia:

	Pr. eléctricos	Pr. Mecánicos	Pr. de chapa	Total
Mañana	3	8	3	14
Tarde	2	3	1	6
Total	5	11	4	20

- En total acuden 20 y por la tarde acuden 6, luego:

$$p(\text{acudir por la tarde}) = \frac{6}{20} = 0'3, \text{ es decir, el } 30 \%$$

- En total acuden 20 y con problemas mecánicos hay 11, luego:

$$p(\text{problemas mecánicos}) = \frac{11}{20} = 0'55, \text{ es decir, el } 55 \%$$

c) Aquí tenemos una información adicional (es un coche que tiene problemas eléctricos), luego se trata de una probabilidad condicionada. Con problemas eléctricos hay 5 y de ellos 3 por la mañana, luego:

$$p(\text{acudir por la mañana} / \text{problemas eléctricos}) = \frac{3}{5} = 0'6, \text{ es decir, el } 60 \%$$

En una tabla de contingencia puede que nos falten datos, pero se pueden hallar fácilmente con los datos que son conocidos.

Ejemplo Para tratar de curar una enfermedad se aplica un tratamiento nuevo a 81 pacientes de un hospital, mientras que en el mismo hospital hay otros 79 pacientes que siguen un tratamiento antiguo contra la misma enfermedad. En total, con ambos tratamientos los curados son 103, de los cuales 60 lo son gracias al tratamiento nuevo. Si tratamos de construir la tabla, con los datos del problema se obtiene:

	Tratamiento antiguo	Tratamiento nuevo	Total
Curarse		60	103
No curarse			
Total	79	81	

Completa la tabla y responde a las cuestiones:

Si se elige un individuo al azar, calcula la probabilidad de que:

1. Se haya curado.
2. No se haya curado.
3. Se haya curado con el nuevo tratamiento.
4. No se haya curado con el nuevo tratamiento.
5. Se haya curado con el tratamiento antiguo.
6. No se haya curado con el tratamiento antiguo.

2.9. El teorema de Bayes.

Como consecuencia del teorema de la probabilidad total y de las propiedades de la probabilidad condicionada, resulta este importante teorema que permite calcular probabilidades condicionadas.

Teorema de Bayes:

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son sucesos incompatibles 2 a 2, y cuya unión es el espacio muestral ($A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$), y B es otro suceso, resulta que:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

Demostración:

Por definición, $p(A_i/B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)}$.

Ahora bien, recordando que $p(A_i \cap B) = p(A_i) \cdot p(B/A_i)$, debido a que $p(B/A_i) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(A_i)}$.

Por tanto, combinando los dos hechos:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(B)}$$

Como por el teorema de la probabilidad total es:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

resulta que sustituyendo:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(B)} = \frac{p(A_i) \cdot p(B/A_i)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)}$$

y el teorema queda demostrado.

Nota:

Las probabilidades $p(A_i)$ se denominan probabilidades *a priori*.

Las probabilidades $p(A_i/B)$ se denominan probabilidades *a posteriori*.

Las probabilidades $p(B/A_i)$ se denominan *verosimilitudes*.

Ejemplo:

Dos clases de 2º de Bachillerato, una de 28 alumnos y otra de 35 alumnos hacen conjuntamente un examen de Matemáticas. La probabilidad de aprobar de los alumnos de la primera clase es de 0'68 y los de la segunda del 0'73. Se toma un examen al azar y resulta que está aprobado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno de la 1ª clase?.

Sea A_1 = “el examen es de un alumno de la primera clase”

A_2 = “el examen es de un alumno de la segunda clase”

B = “el examen está aprobado”

Nos piden $p(A_1/B)$.

Hagamos antes que nada un diagrama de árbol:

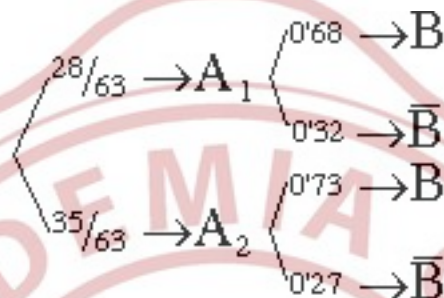


Figura 2.14: Diagrama de árbol para el problema del examen

Por el teorema de Bayes:

$$p(A_1/B) = \frac{p(A_1) \cdot p(B/A_1)}{p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2)}$$

Sustituyendo:

$$p(A_1/B) = \frac{\frac{28}{63} \cdot 0'68}{\frac{28}{63} \cdot 0'68 + \frac{35}{63} \cdot 0'73} = \frac{0'302}{0'708} = 0'427$$

$p(A_1)$ es la probabilidad “a priori”, es decir, antes de realizar el experimento y careciendo de información.

En este caso $p(A_1) = \frac{28}{63} = 0'444$.

$p(A_1/B)$ es la probabilidad “a posteriori”, después de realizarlo y conocer más información. En este caso $p(A_1/B) = 0'427$ (es algo menor).

Ejercicio:

Se tienen dos urnas. En la primera hay 10 bolas blancas, 7 negras y 5 rojas. En la segunda 24 blancas, 4 negras y 9 rojas. Se elige una urna al azar y se saca una bola. Calcular:

a) Probabilidad de sacar bola blanca.

b) Sabiendo que la bola extraída es blanca, probabilidad de que provenga de la segunda urna.

Solución: $\frac{449}{814}, \frac{264}{449}$.

Capítulo 3

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y DISTRIBUCIÓN NORMAL

3.1. Introducción

Estudiaremos en este tema dos de las distribuciones de probabilidad más importantes y que son imprescindibles a la hora de adentrarnos en el estudio de la inferencia estadística. La distribución binomial es uno de los primeros ejemplos de las llamadas distribuciones discretas (que sólo pueden tomar un número finito, o infinito numerable, de valores). Fue estudiada por Jakob Bernoulli (Suiza, 1654-1705), quién escribió el primer tratado importante sobre probabilidad, “Ars conjectandi” (El arte de pronosticar). Los Bernoulli formaron una de las sagas de matemáticos más importantes de la historia. La distribución normal es un ejemplo de las distribuciones continuas, y aparece en multitud de fenómenos sociales. Fue estudiada, entre otros, por J.K.F. Gauss (Alemania, 1777-1855), uno de los más famosos matemáticos de la historia. La gráfica de la distribución normal en forma de campana se denomina Campana de Gauss.

3.2. La distribución binomial o de Bernoulli

La distribución binomial está asociada a experimentos del siguiente tipo:

- Realizamos n veces cierto experimento en el que consideramos sólo la posibilidad de éxito o fracaso.
- La obtención de éxito o fracaso en cada ocasión es independiente de la obtención de éxito o fracaso en las demás ocasiones.
- La probabilidad de obtener éxito o fracaso siempre es la misma en cada ocasión.

Veámoslo con un *ejemplo*

Tiramos un dado 7 veces y contamos el número de cincos que obtenemos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres cincos?.

Este es un típico ejemplo de distribución binomial, pues estamos repitiendo 7 veces el experimento de lanzar un dado. ¿Cuál es nuestro éxito?.

Evidentemente, sacar un 5, que es en lo que nos fijamos.

El fracaso, por tanto, será no sacar 5, sino sacar cualquier otro número.

Por tanto, Éxito = E = “sacar un 5” $\implies p(E) = \frac{1}{6}$

Fracaso = F = “no sacar un 5” $\implies p(F) = \frac{5}{6}$

Para calcular la probabilidad que nos piden, fijémonos en que nos dicen que sacamos 3 cincos y por lo tanto tenemos 3 éxitos y 4 fracasos, ¿de cuántas maneras pueden darse estas posibilidades?.

Podríamos sacar 3 cincos en las 3 primeras tiradas y luego 4 tiradas sin sacar cinco, es decir: EEEFFFF

Pero también podríamos sacar EEEFFFE, es decir que en realidad estamos calculando de cuántas

maneras se pueden ordenar 4 fracasos y 3 éxitos. Recordando las técnicas combinatorias, este problema se reduce a calcular las permutaciones con elementos repetidos:

$$P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{ formas}$$

Y por tanto, como $p(E) = \frac{1}{6}$ y tengo 3 éxitos y $p(F) = \frac{5}{6}$ y tengo 4 fracasos:

$$p(\text{tener 3 éxitos y 4 fracasos}) = 35 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0'0781$$

Formalizando lo obtenido, en una variable binomial con 7 repeticiones y con probabilidad de éxito $\frac{1}{6}$, la probabilidad de obtener 3 éxitos es 0'0781, y lo expresaríamos:

$$\text{Bin}\left(7; \frac{1}{6}\right), \text{ entonces } p(X = 3) = 0'0781$$

Como repetir este proceso sería bastante penoso en la mayoría de los casos, lo mejor es recurrir a la siguiente fórmula que expresa la probabilidad de obtener cierto número de éxitos en una distribución binomial:

Definición de distribución binomial:

Si realizamos n veces un experimento en el que podemos obtener éxito, E, con probabilidad p y fracaso, F, con probabilidad q ($q = 1 - p$), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros n y p , y lo representaremos por $\text{Bin}(n; p)$. En este caso la probabilidad de obtener k éxitos viene dada por:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}$$

Nota:

Observar que las probabilidades de éxito y fracaso son complementarias, es decir, $q = 1 - p$ y $p = 1 - q$, por lo que basta saber una de ellas para calcular la otra.

Ejemplo:

Antes teníamos $\text{Bin}\left(7; \frac{1}{6}\right)$, y queríamos calcular $p(X=3)$ (obtener 3 éxitos). Aplicando la fórmula:

$$p(X = 3) = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0'0781$$

Ejemplo:

Supongamos que la probabilidad de que una pareja tenga un hijo o una hija es igual. Calcular la probabilidad de que una familia con 6 descendientes tenga 2 hijos.

En este caso Éxito = E = “tener hijo” y $p(E) = 0'5$.

Fracaso = F = “tener hija” y $p(F) = 0'5$.

Estamos por tanto ante una binomial $\text{Bin}(6; 0'5)$ y nos piden $p(X=2)$.

Si aplicamos la fórmula es:

$$p(X = 2) = \binom{6}{2} \cdot (0'5)^2 \cdot (0'5)^4 = 0'2344$$

Nota:

La elección de éxito o fracaso es subjetiva y queda a elección de la persona que resuelve el problema, pero teniendo cuidado de plantear correctamente lo que se pide. En el caso concreto del ejemplo anterior, si:

Éxito = “tener hija”, como nos piden la probabilidad de que una familia con 6 hijos tenga 2 hijos, si el éxito es tener hija hemos de plantearnos cuál es la probabilidad de tener 4 éxitos (4 hijas), es

decir:

$$p(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot (0'5)^4 \cdot (0'5)^2 = 0'2344$$

Evidentemente sale lo mismo, pero hay que ser consecuente a la hora de elegir el éxito y el fracaso y la pregunta que nos hagan.

3.2.1. El uso de las tablas de la distribución binomial

La distribución binomial se encuentra tabulada por lo que es fácil calcular probabilidades sin necesidad de hacer demasiadas cuentas. Para usar las tablas de la distribución binomial es necesario conocer:

- El número de veces que se realiza el experimento (n).
- La probabilidad de éxito (p).
- El número de éxitos (k).

La probabilidad p se busca en la primera fila (valores desde 0'01 hasta 0'5).

El número de veces que se realiza el experimento, en la primera columna (valores desde 2 a 10) y el número de éxitos a su lado.

Por ejemplo en el caso anterior, Bin (6;0'5) , $p(X=2)$, la columna $p=0'5$ es la última, y cuando $n=6$ y $k=2$ encontramos 0'2344, el valor que habíamos calculado.

Nota importante: El caso en que $p > 0'5$, no se encuentra tabulado.

La razón es bien sencilla. Si $p > 0'5$, entonces $q < 0'5$ y basta intercambiar los papeles de éxito y fracaso para que podamos utilizar la tabla.

Ejemplo:

La probabilidad de que un alumno de 2º de Bachillerato apruebe las Matemáticas es de 0'7. Si consideramos un grupo de 8 alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que cinco de ellos aprueben las Matemáticas?

Si éxito = “aprobar” y fracaso = “suspender”, entonces $p = 0'7$ y $q = 0'3$.

Tenemos, por tanto, una Bin(8;0'7).

Nos piden calcular $p(X=5)$, que no se puede calcular mediante las tablas porque $p = 0'7$ y sólo tenemos hasta $p = 0'5$. Por tanto si intercambiamos éxito = “suspender” y fracaso = “aprobar” entonces $p = 0'3$, $q = 0'7$, es decir la nueva binomial es Bin(8;0'3) y nos piden que aprueben 5 de 8, es decir que suspendan 3 de 8 o lo que es lo mismo, que tengamos 3 éxitos, $p(X=3)$, y buscando en la tabla es $p(X=3) = 0'2541$.

También, desde luego podríamos haber utilizado la fórmula desde el principio, utilizar la Bin(8;0'7) y olvidarnos de tablas para hacer:

$$p(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot (0'7)^5 \cdot (0'3)^3 = 0'254$$

3.2.2. Probabilidades acumuladas

Es posible que nos pidan no sólo la probabilidad de que ocurran un cierto número de éxitos en concreto, sino que ocurran como mucho “ k ” éxitos o preguntas similares. En el ejemplo anterior, por ejemplo, podrían pedirnos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben como mucho 2 alumnos?.

Si éxito = aprobar y fracaso = suspender, $p = 0'7$ y $q = 0'3$, entonces nos piden $p(X \leq 2)$. En este caso, basta pensar en que para que aprueben 2 alumnos como mucho, puede que aprueben 2, 1 o ninguno, es decir:

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 0'0001 + 0'0012 + 0'01 = 0'1013$$

(haz las cuentas)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben entre 3 y 6 alumnos (inclusive)?.

Del mismo modo:

$$p(3 \leq X \leq 6) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) = \\ = 0'0467 + 0'1361 + 0'2541 + 0'2965 = 0'7334$$

Hemos de tener en cuenta que para la distribución binomial, en las tablas sólo se admiten valores hasta $n=10$ (10 repeticiones del experimento). Para valores de $n > 10$, inevitablemente hemos de utilizar la fórmula.

Ejemplo:

Los alumnos de cierta clase se encuentran en una proporción del 67 % que estudian inglés y el resto francés.

Tomamos una muestra de 15 alumnos de la clase, calcular:

- Probabilidad de que al menos encontremos tres alumnos de inglés.
- Probabilidad de que los 15 alumnos estudien inglés.
- Probabilidad de que estudien inglés entre 7 y 10 alumnos.

Si éxito = estudiar inglés, $p = 0'67$ y fracaso = estudiar francés, $q = 1 - 0'67 = 0'33$. Manejamos por tanto una $\text{Bin}(15; 0'67)$

- $p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) + \dots + p(X = 15)$.

Una opción es calcular estas 13 probabilidades y sumarlas. Como hay que aplicar la fórmula para calcular cada una, la tarea se puede hacer bastante larga. Otra opción, más sencilla, es pasar al complementario. El complementario de encontrar al menos 3 alumnos de inglés es encontrar como mucho 2 alumnos de inglés, $p(X \leq 2)$.

Es decir,

$$p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2))$$

y sólo tenemos que calcular 3 probabilidades: $p(X = 0) \approx 0$, $p(X = 1) = 0'000001$, $p(X = 2) = 0'000026$ (¡compruébalo!).

Por lo cual,

$$p(X \geq 3) = 1 - (0 + 0'000001 + 0'000026) = 1 - 0'000027 = 0'999973$$

- $p(X = 15) = 0'0025$ (aplica la fórmula).

c)

$$p(7 \leq X \leq 10) = p(X = 7) + p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) = \\ = 0'0549 + 0'1114 + 0'1759 + 0'2142 = 0'5564.$$

3.2.3. Media y desviación típica en una distribución binomial

Aunque no se demostrará, en una distribución binomial $\text{Bin}(n; p)$, el número esperado de éxitos o media, viene dado por $\bar{x} = n \cdot p$. (Recordemos que la media es una medida de centralización).

La desviación típica, σ , que es una medida de dispersión y mide lo alejados que están los datos de la media, viene dada por $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

3.3. La distribución Normal

Al estudiar aspectos tan cotidianos como:

- Caracteres morfológicos de individuos (personas, animales, plantas) de una misma raza. como tallas, pesos, envergaduras, etc.
- Caracteres fisiológicos, como el efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.
- Caracteres sociológicos, como el consumo de ciertos productos por individuos de un mismo grupo humano.
- Caracteres psicológicos, como el cociente intelectual, grado de adaptación a un medio.
- Caracteres físicos, como la resistencia a la rotura de ciertas piezas. . .

todos ellos tienen en común que se distribuyen “normalmente”. ¿Qué quiere decir esta expresión?. Pues, por ejemplo, si hacemos una estadística para conocer la altura de 1400 mujeres y representamos los resultados en un diagrama de barras, obtenemos:

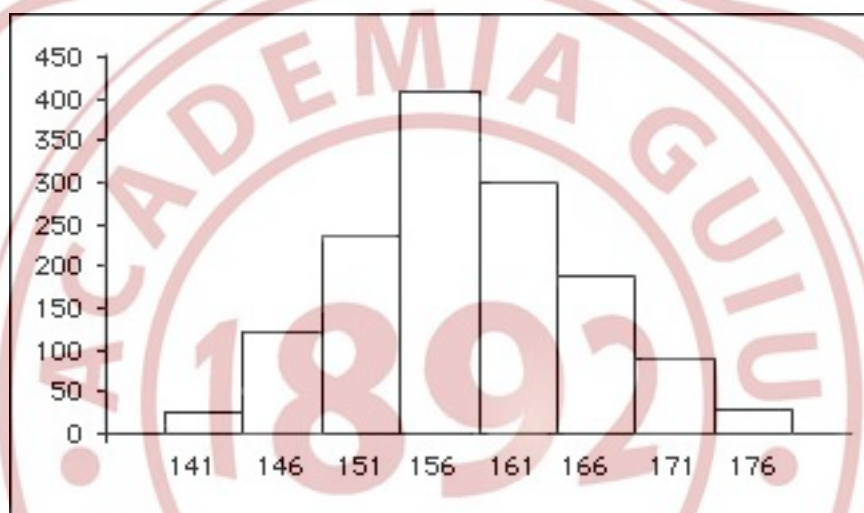


Figura 3.1: Distribución de estaturas de 1400 mujeres

Las gráficas de este tipo son muy corrientes: Hay pocos individuos en los extremos y un aumento paulatino hasta llegar a la parte central del recorrido, donde está la mayoría de ellos.

Definición: Diremos que una distribución de probabilidad sigue una *distribución normal* de media $\bar{x}$ y desviación típica σ , y lo representaremos por $N(\bar{x}; \sigma)$ cuando la representación gráfica de su función de densidad es una curva positiva continua, simétrica respecto a la media, de máximo en la media, y que tiene 2 puntos de inflexión, situados a ambos lados de la media ($\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$ respectivamente) y a distancia de σ ella, es decir de la forma:

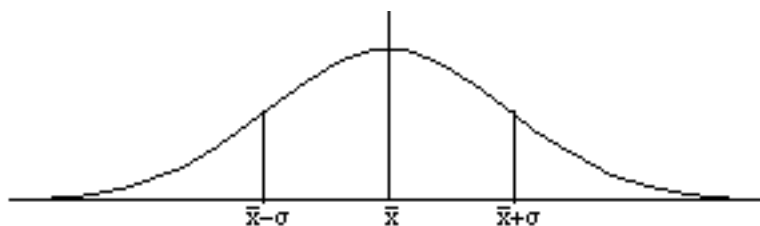


Figura 3.2: Distribución normal $N(\bar{x}; \sigma)$. El máximo está en $(\bar{x}, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}})$

Dependiendo de los valores que tomen $\bar{x}$ y σ , la gráfica de esta función puede ser más o menos alargada, achatada, etc..., pero en cualquier caso siempre tiene las mismas condiciones de simetría, continuidad, etc reseñadas anteriormente.

El concepto de función de densidad introducido anteriormente no se estudiará con profundidad. Baste decir que la función de densidad determina la forma de cada distribución de probabilidad. En el caso de la distribución normal de parámetros $\bar{x}$ y σ , dicha función viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Propiedad:

El área encerrada bajo la curva normal $N(\bar{x}; \sigma)$ siempre es 1.

La demostración de este resultado no es nada sencilla e implica el uso de resultados matemáticos que exceden el nivel de este curso.

De entre todas las curvas normales $N(\bar{x}; \sigma)$, la más sencilla, usada y conocida es aquella que tiene por media 0 y por desviación típica 1, $N(0, 1)$.

Esta normal estándar se suele representar por Z .

La gráfica de esta curva se denomina campana de Gauss y se puede observar en la figura:

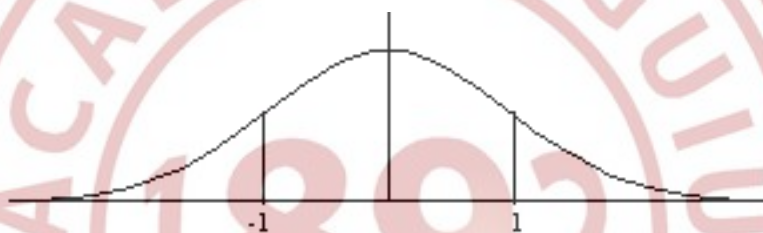


Figura 3.3: Distribución normal $N(0; 1)$. El máximo está en $(0, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}})$

Su función de densidad será:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Puesto que el área bajo esta curva normal es 1, podemos definir una probabilidad de la siguiente manera:

Para un valor cualquiera k , definimos la probabilidad de que la distribución Z , $N(0;1)$, sea menor o igual que k como:

$p(Z \leq k) =$ "Área encerrada bajo la curva normal $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta k "
(es decir la parte rayada de la figura siguiente).

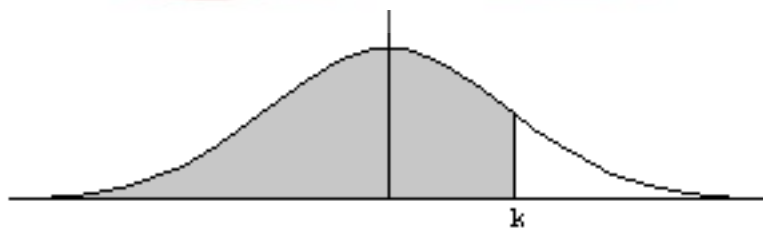


Figura 3.4: Área encerrada por la curva normal desde $-\infty$ hasta k

Ahora bien, ¿cómo calcular dicha área?. Fácil: Dichas áreas o probabilidades se encuentran tabuladas.

3.3.1. Uso de las tablas de la distribución normal $N(0;1)$

La normal $N(0;1)$ se encuentra tabulada, para valores a partir de 0 y hasta 3'99. Si por ejemplo queremos calcular $p(Z \leq 2'78)$, hemos de realizar los pasos:

1. Buscar la parte entera y las décimas en la primera columna (en este caso 2'7).
2. Buscar las centésimas en la primera fila (en este caso 8).
3. En el punto común a la fila y la columna que hemos encontrado, tenemos la probabilidad buscada, en este caso 0'9973.

Por tanto $p(Z \leq 2'78) = 0'9973$.

Si queremos calcular una probabilidad de un valor mayor que 3'99, basta fijarse en que las probabilidades correspondientes a valores tales como 3'62 y mayores ya valen 0'9999 (prácticamente 1). Por eso, para estos valores mayores que 3'99, diremos que la probabilidad es aproximadamente 1. Así:

$$p(Z \leq 5'62) \approx 1$$

aunque no aparezca en la tabla.

Por otra parte, fijémonos en que en este tipo de distribuciones no tiene sentido plantearse probabilidades del tipo $p(Z=k)$, ya que siempre valen 0, al no encerrar ningún área. Por tanto, si nos pidiesen $p(Z=3'2)$, basta decir que $p(Z=3'2)=0$.

Este tipo de distribuciones en las cuales la probabilidad de tomar un valor concreto es 0 se denominan *distribuciones continuas*, para diferenciarlas de otras en las que esto no ocurre, como por ejemplo la binomial, que es una *distribución discreta*.

Así, al pasar al complementario, si tenemos $Z \geq k$, su complementario será $Z < k$, pero como incluir k no influye en la probabilidad, al calcular probabilidades podemos escribir:

$$p(Z \geq k) = 1 - p(Z < k) = 1 - p(Z \leq k)$$

Sólo se puede hacer esto en distribuciones continuas, en el caso de la binomial esto no se puede hacer y hay que ser cuidadosos con el paso al complementario.

Ejercicio: Buscar en la tabla de la normal estándar $N(0;1)$ las probabilidades:

- a) $p(Z \leq 1'15)$ b) $p(Z \leq 0'5)$ c) $p(Z \leq 0'82)$ d) $p(Z \leq 1'05)$ e) $p(Z \leq 4'27)$
f) $p(Z \leq 18'09)$

3.3.2. Cálculo de otras probabilidades

1. Si k es positivo y queremos calcular $p(Z \geq k)$, es decir el área rayada:

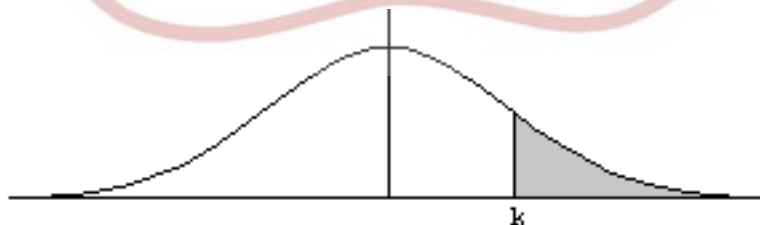


Figura 3.5: $p(Z \geq k)$. Basta pasar al complementario

basta pasar al complementario, es decir: $p(Z \geq k) = 1 - p(Z \leq k)$ y esta última probabilidad ya se encuentra tabulada.

Ejercicio: Calcular $p(Z \geq 0'3)$ y $p(Z \geq 2'07)$.

2. Si k es positivo y queremos calcular $p(Z \leq -k)$, es decir el área: por simetría, $p(Z \leq -k) =$

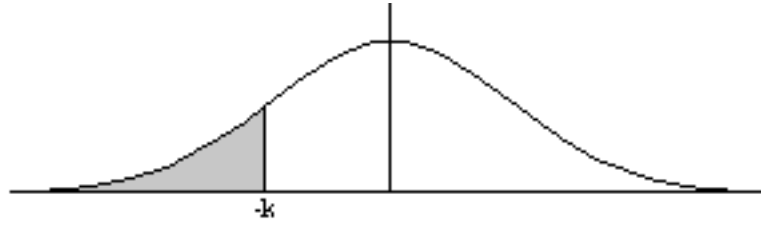


Figura 3.6: $p(Z \leq -k)$. Las probabilidades de valores negativos no están tabuladas

$p(Z \geq k)$ y ésta se calcula como en el caso anterior. Se puede observar la igualdad de áreas en la figura:



Figura 3.7: $p(Z \leq -k) = p(Z \geq k)$. La simetría permite reducir este caso al anterior

Ejercicio: Calcular $p(Z \leq -0'78)$ y $p(Z \leq -3'2)$.

3. Si k es positivo y queremos calcular $p(Z \geq -k)$, es decir el área rayada:

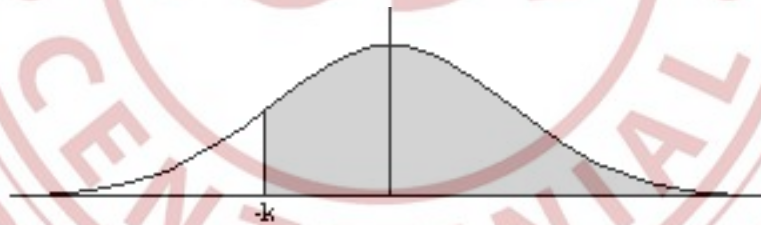


Figura 3.8: $p(Z \geq -k)$

entonces, por simetría $p(Z \geq -k) = p(Z \leq k)$:



Figura 3.9: $p(Z \geq -k) = p(Z \leq k)$. La simetría permite reducir este caso al que ya está tabulado

Ejercicio: Calcular $p(Z \geq -0'96)$ y $p(Z \geq -1'01)$.

4. Probabilidades comprendidas entre dos valores, $p(k_1 \leq Z \leq k_2)$, es decir el área rayada:

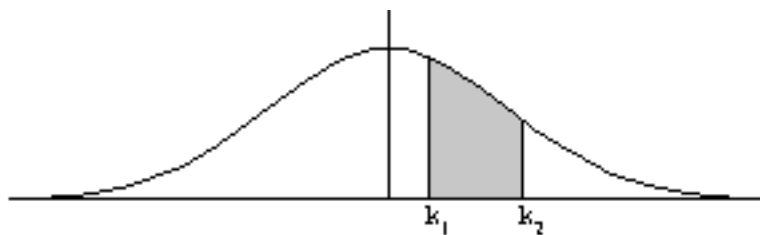


Figura 3.10: $p(k_1 \leq Z \leq k_2)$. Probabilidad comprendida entre dos valores

se calcula restando las áreas:



Figura 3.11: $p(Z \leq k_2)$ en la primera imagen. $p(Z \leq k_1)$ en la segunda. Al restar obtenemos el área pedida.

Se quita la parte correspondiente a $Z \leq k_1$, $p(Z \leq k_2) - p(Z \leq k_1)$.

Ejercicio: Calcular $p(-0'96 \leq Z \leq 1'49)$ y $p(-1'32 \leq Z \leq -0'57)$.

Ejercicio: Calcular $p(Z=2)$, $p(Z \leq 2)$, $p(Z \geq 2)$, $p(Z \leq -2)$, $p(Z \geq -2)$, $p(-2 \leq Z \leq 2)$, $p(0'81 \leq Z \leq 1'33)$.

3.3.3. Cálculo de probabilidades en normales $N(\bar{x}; \sigma)$

Si no tenemos una distribución $N(0;1)$, sino una $N(\bar{x}; \sigma)$ cualquiera, ¿cómo calcular probabilidades, si no tenemos tabla salvo para $N(0;1)$? El siguiente resultado nos da la respuesta.

Propiedad:

Si X sigue una distribución $N(\bar{x}; \sigma)$, entonces la variable $Z = \frac{X - \bar{x}}{\sigma}$ sigue una distribución $N(0,1)$. (El paso de la variable $X \rightarrow N(\bar{x}; \sigma)$ a la $Z \rightarrow N(0;1)$ se denomina *tipificación* de la variable X).

Ejemplo:

Las estaturas de 600 soldados se distribuyen de acuerdo a una distribución normal de media 168 y desviación típica 8 cm. ¿Cuántos soldados miden entre 166 y 170 cm?.

Sea X la distribución de los soldados, X es una $N(168,8)$. Nos piden $p(166 \leq X \leq 170)$.

Utilizando el resultado anterior, primero restamos $\bar{x}=168$ en la desigualdad:

$$p(166 \leq X \leq 170) = p(166 - 168 \leq X - 168 \leq 170 - 168) = p(-2 \leq X - 168 \leq 2)$$

Y ahora dividimos entre $\sigma = 8$, con lo que acabamos de tipificar:

$$p(166 \leq X \leq 170) = p(-2 \leq X - 168 \leq 2) = p\left(\frac{-2}{8} \leq \frac{X - 168}{8} \leq \frac{2}{8}\right)$$

Llamando a $\frac{X - 168}{8} = Z$, ésta ya es normal $N(0,1)$ y se encuentra en las tablas:

$$p(166 \leq X \leq 170) = p(-0'25 \leq Z \leq 0'25) = p(Z \leq 0'25) - p(Z \leq -0'25) = \\ = (\text{tablas}) = 0'5987 - 0'4013 = 0'1974.$$

(pues $p(Z \leq -0'25) = p(Z \geq 0'25) = 1 - p(Z \leq 0'25) = 1 - 0'5987 = 0'4013$).

Ejercicios: 1) En una distribución $N(22,5)$, calcula: $p(X \leq 27)$, $p(X \geq 27)$, $p(X \geq 125)$, $p(15 \leq X \leq 20)$, $p(17 \leq X \leq 30)$.

2) Los pesos de 60 soldados siguen una distribución $N(67,5)$. Calcula la probabilidad de que el peso sea:

- a) mayor de 80 kg.
- b) 50 kg. o menos
- c) menos de 60 kg.
- d) 70 kg.
- e) Entre 60 y 70 kg inclusive.

3.3.4. Otro uso de las tablas

Hasta ahora nos han dado la distribución normal $N(0;1)$ y nos pedían $p(Z \leq k)$ siendo k un cierto número, y nos pedían calcular dicha probabilidad.

Ahora bien, otra pregunta puede ser: Dado que en una normal $N(0;1)$ sabemos que $p(Z \leq k) = 0'9573$, ¿quién es k ?

La resolución es bien sencilla. Basta buscar 0'9573 *dentro de la tabla* de la distribución normal, y lo encontramos en el cruce de la fila 1'7 con la columna 2, y por lo tanto k debe ser 1'72.

Ejercicio: Calcular k si:

- a) $p(Z \leq k) = 0'8078$.
- b) $p(Z \geq k) = 0'0028$.

En caso de que el valor a buscar no aparezca directamente dentro de la tabla de la distribución normal, pueden ocurrir dos posibilidades:

a) Si el valor se encuentra entre dos valores de la tabla y a la misma distancia (aproximadamente) de cada uno de ellos, por ejemplo: $p(Z \leq k) = 0'7982$. En este caso el valor buscado será la media entre los valores extremos.

Si buscamos en la tabla este valor no aparece directamente, sino que se encuentra entre los valores 0'7967 (que corresponde a 0'83) y 0'7996 (que corresponde a 0'84). Por tanto el valor de k será:

$$k = \frac{0'83 + 0'84}{2} = 0'835$$

b) Si el valor está entre dos valores, pero muy cercano a uno de ellos, directamente tomamos este valor, por ejemplo: $p(Z \leq k) = 0'7970$. El valor más cercano es 0'7967 (que corresponde a 0'83) y como el valor buscado está muy cerca de él, entonces directamente $k=0'83$.

Si la distribución no es normal $N(0;1)$, sino $N(\bar{x}; \sigma)$, tendremos que tipificar previamente.

Por ejemplo, si X sigue una normal $N(6;3)$ y $p(X \leq k) = 0'9082$, calcula k .

Tipificando:

$$p\left(\frac{X - 6}{3} \leq \frac{k - 6}{3}\right) = 0'9082 \longrightarrow p\left(Z \leq \frac{k - 6}{3}\right) = 0'9082$$

Y buscando en la tabla,

$$\frac{k - 6}{3} = 1'33 \Rightarrow k - 6 = 3'99 \Rightarrow k = 9'99$$

Ejercicios:

1. Calcular k si $p(X \leq k) = 0'6141$ y X sigue una $N(15,4)$.
2. De una variable normal $N(\bar{x}; \sigma)$ se sabe que $p(X \leq 7) = 0'9772$ y $p(X \leq 6'5) = 0'8413$. Calcular:
 - a) $\bar{x}$ y σ .
 - b) $p(5'65 \leq X \leq 6'25)$
 - c) El número k tal que $p(X > k) = 0'3$



3.4. Relación entre la distribución binomial y la distribución normal

Es un hecho comprobado que cuando tenemos una distribución $\text{Bin}(n;p)$, a medida que n crece, es difícil hacer uso de las fórmulas y/o tablas.

Por *ejemplo*, tiramos un dado 100 veces, calcular la probabilidad de obtener entre 20 y 33 cinco(inclusive).

Si éxito = obtener cinco entonces $p = \frac{1}{6}$ y fracaso = no obtener cinco y $q = \frac{5}{6}$.

Tenemos una $\text{Bin}\left(100; \frac{1}{6}\right)$, y nos piden $p(20 \leq X \leq 33)$.

Es inviable aplicar las tablas (pues repetimos el experimento 100 veces) y tampoco la fórmula pues es inviable calcular, por ejemplo,

$$p(X = 32) = \binom{100}{32} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{32} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{68}$$

¿Cómo resolver el problema?. Del siguiente modo:

Teorema Central del Límite:

La distribución binomial $\text{Bin}(n;p)$ se aproxima a una curva normal de media $\bar{x} = n \cdot p$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$, cuando n tiende a ∞ , es decir, cuando n se hace muy grande.

La aproximación se puede aplicar (es una buena aproximación) sólo si n es grande, en concreto $n \geq 30$ y además $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot q \geq 5$. Si no se cumplen estas condiciones NO podemos aproximar la binomial que tengamos por una distribución normal.

En caso de que podamos aproximar, debemos tener en cuenta que estamos pasando de una variable discreta (binomial) a una continua (normal), y por tanto son distribuciones diferentes. El “precio” que hay que pagar por pasar de una a otra se denomina “*corrección por continuidad*” y consiste en hacer determinados ajustes para que la aproximación realizada sea lo más precisa posible.

Así, si nos piden $p(X=k)$ en una distribución binomial X , y aproximamos X por una distribución normal Y , no podemos calcular directamente $p(Y=k)$ porque, como ya se ha comentado anteriormente, en una distribución continua todas estas probabilidades valen 0. La corrección por continuidad consiste en tomar un pequeño intervalo de longitud 1 alrededor del punto k .

De otro modo, si nos piden $p(X=k)$ con X binomial, con la aproximación normal Y deberemos calcular $p(k - 0'5 \leq Y \leq k + 0'5)$.

Del mismo modo se razona en el caso de probabilidades acumuladas en la binomial. Algunos ejemplos:

Si nos piden $p(X < k)$ con X binomial, aproximando por Y normal calcularemos $p(Y \leq k - 0'5)$. La explicación de que haya que restar 0'5 y no sumarlo es que queremos que X sea menor estrictamente que k , con lo cual, si sumase 0'5, el propio k aparecería en la probabilidad a calcular y NO debe aparecer.

Por contra, si debiésemos calcular $p(X \leq k)$, con X binomial, fijémonos que ahora k SÍ está incluido en la probabilidad y por tanto al aproximar por la normal Y deberíamos calcular $p(Y \leq k + 0'5)$.

Comprender estos dos hechos es fundamental para realizar bien la corrección por continuidad al aproximar una distribución binomial por una normal.

En el caso anterior, $\bar{x} = n \cdot p = \frac{100}{6} = 16'67$ y $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{\frac{500}{36}} = 3'73$. De modo que, como $n \geq 30$, $n \cdot p = 16'67 \geq 5$ y $nq = 83'33 \geq 5$, se puede aproximar la binomial por la normal, es decir:

$$X \longrightarrow \text{Bin}\left(100; \frac{1}{6}\right) \approx Y \longrightarrow N(16'67; 3'73)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 p(20 \leq X \leq 33) &\underset{(*)}{\approx} p(20 - 0'5 \leq Y \leq 33 + 0'5) = p\left(\frac{19'5 - 16'67}{3'73} \leq \frac{Y - 16'67}{3'73} \leq \frac{33'5 - 16'67}{3'73}\right) = \\
 &= p(0'89 \leq Z \leq 4'51) = p(Z \leq 4'51) - p(Z \leq 0'89) \approx 1 - 0'8133 = 0'1867
 \end{aligned}$$

Notemos que en el paso señalado por (*) hemos cambiado X(binomial) por Y(normal) y se ha realizado la corrección por continuidad.



Capítulo 4

INFERENCIA ESTADÍSTICA

4.1. Introducción

Inferir: Sacar una consecuencia de una cosa. Sacar consecuencia o deducir una cosa de otra.

La estadística, ciencia o rama de las Matemáticas que se ocupa de recoger datos, analizarlos y organizarlos, y de realizar las predicciones que sobre esos datos puedan deducirse, tiene dos vertientes básicas:

a) Estadística descriptiva: Básicamente se ocupa de la 1ª parte, es decir, a partir de ciertos datos, analizarlos y organizarlos. Es aquí donde tiene sentido calcular la media, mediana, moda, desviación media, desviación típica, etc.

b) Estadística inferencial: Se ocupa de predecir, sacar conclusiones, para una población tomando como base una muestra (es decir, una parte) de dicha población. Como todas las predicciones, siempre han de hacerse bajo un cierto grado de fiabilidad o confianza.

Será esta última vertiente de la estadística la que estudiemos en este tema.

4.2. Muestreos

Ya sabemos que una población es el conjunto de individuos sobre los que hacemos cierto estudio, y que una muestra es un subconjunto de la población. Es evidente que los resultados de una determinada encuesta tendrán un mayor grado de fiabilidad si dicha encuesta se realiza sobre la población completa. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones esto no es posible, debido a múltiples razones:

* Imposibilidad material (Hacer una encuesta a los casi 41 millones de españoles es imposible, hacer un estudio sobre la fecha de caducidad de un producto. Si lo hacemos con todos los productos ¿qué vendemos luego?)

* Imposibilidad temporal (Hacer un estudio sobre la duración de una bombilla. ¿Cuánto debemos esperar para saberlo?).

Por tanto, es habitual que tengamos que manejarnos con muestras, de modo que es importante saber elegir bien una muestra de la población, una muestra que represente bien a dicha población.

Hay muchas maneras de elegir una muestra de una población.

Antes de pasar a analizar dichas formas de extracción de muestras, lo que si hemos de dejar claro es que todas las muestras han de cumplir varias condiciones indispensables.

Es evidente que para que el estudio a realizar sea fiable, hay que cuidar mucho la elección de la muestra, para que represente en la medida de lo posible a la población de la que se extrae. Si la muestra está mal elegida, diremos que *no es representativa*.

En este caso, se pueden producir errores imprevistos e incontrolados. Dichos errores se denominan *sesgos* y diremos que *la muestra está sesgada*.

Una de las condiciones para que una muestra sea representativa es que el *muestreo* (o sistema para elegir una muestra de una población) que se haga sea *aleatorio*, es decir, todas las personas de

la población tengan las mismas posibilidades de ser elegidas, mientras que si la elección de la muestra es subjetiva, es probable que resulte sesgada.

Las distintas maneras de elegir una muestra de una población se denominan muestreos. Básicamente hay dos tipos de muestreos:

1. *Muestreo no probabilístico*: El investigador no elige la muestra al azar, sino mediante determinados criterios subjetivos.
2. *Muestreo probabilístico*: Cuando la muestra se elige al azar. En este caso podemos distinguir varios tipos:

- a) *Muestreo aleatorio simple*: Aquel en el que cada individuo de la población tiene las mismas posibilidades de salir en la muestra.
- b) *Muestreo sistemático*: En el que se elige un individuo al azar y a partir de él, a intervalos constantes, se eligen los demás hasta completar la muestra.
- c) *Muestreo estratificado*: En este muestreo se divide la población en clases o estratos y se escoge, aleatoriamente, un número de individuos de cada estrato proporcional al número de componentes de cada estrato.
- d) *Muestreo por conglomerados*: Si no disponemos de la relación de los elementos de la población, o de los posibles estratos, no podemos aplicar los muestreos anteriores.

Aquí entra el llamado muestreo por conglomerados, donde en lugar de elegir individuos directamente, se eligen unidades más amplias donde se clasifican los elementos de la población, llamados conglomerados. En cada etapa del muestreo en lugar de seleccionar elementos al azar seleccionamos conglomerados.

Los conglomerados deben ser tan heterogéneos como la población a estudiar, para que la represente bien. Luego se elegirían algunos de los conglomerados al azar, y dentro de éstos, analizar todos sus elementos o tomar una muestra aleatoria simple.

No debemos confundir estrato y conglomerado. Un estrato es homogéneo (sus elementos tienen las mismas características), mientras que un conglomerado es heterogéneo (debe representar bien a la población).

Veamos la diferencia de estos muestreos mediante un ejemplo:

Imaginemos que hemos de recoger una muestra de 20 alumnos de entre los de un instituto de 600.

-Muestreo aleatorio simple: Elegiríamos un alumno al azar (probabilidad de elegirlo $\frac{1}{600}$). Lo devolvemos a la población y se elige otro (probabilidad de elegirlo $\frac{1}{600}$), y así hasta 20. Notemos que si no devolviésemos al alumno, entonces, la probabilidad de escoger al 2º alumno sería $\frac{1}{599}$, y ya no todos tendrían la misma probabilidad de ser elegidos. El problema es que entonces permitimos que se puedan repetir individuos.

-Muestreo sistemático: Como hemos de elegir 20 alumnos de 600, es decir, 1 de cada 30, se procede así: Se ordenan los alumnos y se numeran, se elige uno al azar, por ejemplo el alumno 27, y luego los demás se eligen a partir de este a intervalos de 30 alumnos. Escogeríamos por tanto a los alumnos:

27,57,87,117,147,177,207,237,267,297,327,357,387,417,447,477,507,537,567,597

y el alumno 627 ya es otra vez el 27.

-Muestreo estratificado: Si queremos que la muestra sea representativa, lo mejor será conocer cuántos alumnos de cada curso hay, es decir, si hay 200 alumnos de 3º ESO, 150 de 4º ESO, 150 de 1º Bachillerato y 100 de 2º Bachillerato, procederíamos:

Como de 600 en total hemos de elegir a 20, de 200 de 3º de ESO hemos de elegir x:

$$\frac{20}{600} = \frac{x}{200} \longrightarrow x = \frac{4000}{600} = 6'6 \approx 7 \text{ alumnos de 3º}$$

(Utilizando la regla de tres)

De igual manera podemos calcular los alumnos correspondientes a los demás cursos:

$$\frac{20}{600} = \frac{y}{150} \longrightarrow y = \frac{3000}{600} = 5 \text{ alumnos de } 4^{\circ}$$

$$\frac{20}{600} = \frac{z}{150} \longrightarrow z = \frac{3000}{600} = 5 \text{ alumnos de } 1^{\circ}$$

$$\frac{20}{600} = \frac{t}{100} \longrightarrow t = \frac{2000}{600} = 3'3 \text{ alumnos de } 2^{\circ}$$

De modo que en nuestra muestra de 20, 7 alumnos son de 3º, 5 de 4º, 5 de 1º y 3 de 2º. Para la elección de cada alumno dentro de cada curso, utilizamos el muestreo aleatorio simple.

-Muestreo por conglomerados: Para ver este muestreo, hemos de cambiar el ejemplo.

Supongamos que queremos extraer una muestra aleatoria de los estudiantes universitarios del país. Necesitaríamos una lista con todos ellos para poder realizar algún muestreo del tipo de los 3 anteriores, lo cuál es muy difícil de conseguir. Sin embargo, los estudiantes están clasificados por Universidades, Facultades y Clases.

Podemos seleccionar en una primera etapa algunas Universidades, después algunas facultades al azar, dentro de las facultades algunas clases y dentro de las clases, algunos estudiantes por muestreo aleatorio simple. Los conglomerados en cada etapa serían las diferentes Universidades, las diferentes facultades y los diferentes clases.

Como vemos los conglomerados son unidades amplias y heterogéneas.

Ejercicio:

En una población de 1500 jóvenes, 7500 adultos y 1000 ancianos, se hace una encuesta a 200 personas para conocer sus actividades de ocio preferidas. Si se utiliza un muestreo estratificado, ¿qué tamaño muestral corresponde a cada estrato?.

4.3. Estimación por puntos

Como el objetivo principal de la estadística inferencial es el estudio de la población y realizar predicciones a cerca de ella pero a partir de una muestra de ella, no de la población entera, en principio, tendremos que estimar los índices de la población a partir de los índices correspondientes para la muestra.

En una primera aproximación, parece lógico pensar que si queremos determinar la media de una cierta población, si hemos cogido una muestra representativa de dicha población, la media de la muestra (que es fácilmente calculable porque tenemos los datos) será muy parecida a la de la población y por tanto sirva para estimarla.

Distinguiremos, por tanto, entre:

1. *Parámetros poblacionales:* Que son los índices centrales y de dispersión que definen a una población.

Representaremos la media poblacional μ y la desviación típica poblacional σ .

En el caso de proporciones, la proporción de población que tiene una determinada característica la denotaremos por p y la proporción que no la cumple por $q = 1 - p$. (Como en la Distribución binomial)

2. *Estadísticos poblacionales:* Son los índices centrales y de dispersión que definen a una muestra.

Representaremos la media muestral por $\bar{x}$ y la desviación típica muestral por s .

En el caso de proporciones, la proporción de muestra que tiene una determinada característica la denotaremos por $\hat{p}$ y la proporción que no la cumple por $\hat{q} = 1 - \hat{p}$.

¿Cuál es el problema de la estimación entonces?. Como vamos a disponer de una muestra, lo que podemos calcular es $\bar{x}$ y s (o bien $\hat{p}$ y $\hat{q}$), y a partir de estos intentar estimar quienes tienen que ser μ y σ (o bien p y q), los reales para la población.

En la estimación por puntos, el conocimiento de un estadístico muestral nos permitirá decidir cuál es el correspondiente parámetro de la población. Para ello hemos de conocer cuál es la relación entre un estadístico y el correspondiente parámetro.

4.4. Distribución muestral de medias

Si tenemos una población de parámetros desconocidos μ y σ , y tomamos una muestra, podemos calcular la media muestral, $\bar{x}_1$, que tendrá cierta relación con μ .

Podríamos tomar otra muestra, de igual tamaño, y calcular de nuevo su media muestral $\bar{x}_2$, que también estará relacionada con μ .

Así sucesivamente, considerando varias muestras y haciendo las medias muestrales respectivas, tenemos una serie de medias, relacionadas de alguna manera con μ ¿cómo?. De la siguiente forma:

Propiedad: Si la población sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde μ y σ son desconocidos, si elegimos todas las muestras de cierto tamaño (n), de forma que sean representativas, entonces:

a) La media de las medias muestrales de todas las muestras posibles, es igual a la media poblacional, es decir:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k}{k} = \mu$$

b) La desviación típica de las medias muestrales posibles es:

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde σ es la desviación típica poblacional y n es el tamaño de las muestras.

Conclusión: Las medias de las muestras de tamaño n extraídas de una población de parámetros μ y σ , siguen una distribución:

$$\bar{X} \longrightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

siempre que dichas muestras tengan un tamaño $n \geq 30$.

Notas importantes:

- a) Este resultado es consecuencia del *Teorema Central del límite*.
- b) Si la población es normal, el resultado se cumple para muestras de CUALQUIER tamaño (incluso menor que 30).
- c) Si σ es desconocida, el mismo resultado sigue siendo cierto sustituyendo en la fórmula σ por s .

Ejemplo: La altura de los estudiantes de una población se distribuye según una normal de media 167 y desviación típica 3'2.

- a) Calcula la probabilidad de que un estudiante mida menos de 165 cm.
- b) Se toma una muestra de 10 estudiantes. Calcula la probabilidad de que la media muestral sea menor que 165 cm.

En el apartado a) , manejamos la variable

$$X \longrightarrow N(167; 3'2)$$

siendo X = "altura de un estudiante".

La probabilidad pedida será:

$$p(X < 165) = p\left(\frac{X - 167}{3'2} < \frac{165 - 167}{3'2}\right) = p(Z < -0'63) = 0'2676$$

En el apartado b), la variable que manejamos ya no es X , sino que tenemos una muestra de 10 estudiantes. Como la población inicial es normal, podemos aplicar el resultado anterior aunque la muestra sea de tamaño menor que 30. Así, la variable a estudiar es

$\bar{X}$ ="media de las alturas de 10 estudiantes", que según lo dicho, sigue una distribución

$$\bar{X} \longrightarrow N\left(165; \frac{3'2}{\sqrt{10}}\right) = N(165; 1'012)$$

Nos piden:

$$p(\bar{X} < 165) = p\left(\frac{\bar{X} - 167}{1'012} < \frac{165 - 167}{1'012}\right) = p(Z < -1'97) = 0'0244$$

Ejemplo: Los pesos de los tornillos que fabrica cierta máquina se distribuyen según una $N(142'32; 8'5)$ (medidas en gr.). Se toman muestras de 25 tornillos. Calcular:

- Distribución que siguen las medias de esas muestras.
- Probabilidad de que una muestra elegida al azar de 25 tornillos tenga un peso medio superior a 144'6 gr.
- La misma pregunta si la muestra es de 100 tornillos.

a) Como las muestras son de tamaño $n=25$ y la población es normal $N(142'32; 8'5)$, las medias muestrales siguen una distribución:

$$\bar{X} \longrightarrow N\left(142'32; \frac{8'5}{\sqrt{25}}\right) = N(142'32; 1'7)$$

b) Nos piden:

$$p(\bar{X} \geq 144'6) = p\left(Z \geq \frac{144'6 - 144'32}{1'7}\right) = p(Z \geq 1'34) = 1 - p(Z \leq 1'34) = 0'0901$$

c) Si las muestras son de tamaño $n=100$, las medias muestrales siguen una distribución:

$$\bar{X} \longrightarrow N\left(142'32; \frac{8'5}{\sqrt{100}}\right) = N(142'32; 0'85)$$

y por tanto:

$$p(\bar{X} \geq 144'6) = p\left(Z \geq \frac{144'6 - 144'32}{0'85}\right) = p(Z \geq 2'68) = 1 - p(Z \leq 2'68) = 0'0037$$

Ejercicio: Una máquina ha fabricado piezas de precisión con un peso medio de 150 gr. y una desviación típica de 20 gr. Calcular la probabilidad de que una muestra de 80 piezas tenga un peso medio de más de 155 gr. (Solución: 0'0129)

4.5. Distribución muestral de proporciones

Nos planteamos ahora determinar qué proporción de una población posee un cierto atributo, por ejemplo si es fumador o no fumador, si tiene ordenador o no, si tiene alergia o no, etc... El estudio de este tipo de proporciones es equiparable al de una distribución binomial (donde sólo hay dos posibilidades). Si la proporción éxito es p y la de fracaso q , y se toma una muestra de la población de tamaño n , al

igual que en el caso anterior, para cada muestra tendremos una proporción muestral que denotaremos por $\hat{p}$ y una desviación típica muestral que denotaremos por $s_{\hat{p}}$.

Entonces, utilizando razonamientos similares a los del apartado anterior, se verifica que $\hat{p} = p$, y $s_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$ por tanto:

Conclusión: Las proporciones muestrales de tamaño $n \geq 30$, extraídas de una población en la que la probabilidad de éxito es p , se ajustan a una normal

$$N\left(p; \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

Ejemplo: Una fábrica de pasteles fabrica, en su producción habitual, un 3% de pasteles defectuosos. Un cliente recibe un pedido de 500 pasteles de la fábrica.

- a) Probabilidad de que encuentre más del 4% de pasteles defectuosos.
- b) Probabilidad de que encuentre menos de un 1% de pasteles defectuosos.

a) En este caso éxito= “pastel defectuoso”, y la proporción poblacional de éxito es de $p = \frac{3}{100}$ tanto, $q = \frac{97}{100}$. La muestra que recibe el cliente es de tamaño $n=500$.
Por tanto, las proporciones muestrales siguen una distribución:

$$\hat{p} \longrightarrow N\left(\frac{3}{100}; \sqrt{\frac{\frac{3}{100} \cdot \frac{97}{100}}{500}}\right) = N(0'03; 0'076)$$

puesto que las muestras tienen tamaño mayor que 30.

La probabilidad pedida es que la proporción de pasteles defectuosos en la muestra sea mayor del 4%, es decir:

$$p(\hat{p} \geq 0'04) = p\left(Z \geq \frac{0'04 - 0'03}{0'076}\right) = p(Z \geq 1'32) = 0'0934$$

b) En este caso es

$$p(\hat{p} \leq 0'01) = p\left(Z \leq \frac{0'01 - 0'03}{0'076}\right) = p(Z \leq -2'63) = 0'0043$$

Ejercicios:

1. De una población de 120 alumnos, hay 48 que tienen 2 o más hermanos. Si de dicha población se toman muestras de tamaño 40.
 - a) ¿Qué distribución siguen las proporciones muestrales?.
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre en dicha muestra una proporción de más del 55% de alumnos con 2 o más hermanos?.
2. Las notas de cierto examen se distribuyen según una normal de media $\mu=5'3$ y desviación típica $\sigma=2'4$. Hallar la probabilidad de que un estudiante tomado al azar tenga una nota:
 - a) Superior a 6'5
 - b) Inferior a 5'2
 - c) Comprendida entre 5 y 6'5

Halla las mismas probabilidades para la media de las notas de 16 estudiantes elegidos al azar.
3. En un saco mezclamos judías blancas y pintas en la relación de 14 blancas por cada pinta. Extraemos un puñado de 100 judías. Calcula la probabilidad de que la proporción de judías pintas esté comprendida entre 0'05 y 0'1.

4. El cociente intelectual, CI, de unos universitarios se distribuye normalmente con media 100 y desviación típica 11.
- Se elige al azar una persona. Hallar la probabilidad de que su CI esté entre 100 y 103.
 - Se elige al azar una muestra de 25 personas. Encontrar la probabilidad de que la media de sus cocientes intelectuales esté entre 100 y 103.

4.6. Intervalos de probabilidad

En una variable normal cualquiera $N(\mu, \sigma)$, se verifica que:

- En el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ está el 68'26% de la población.
- En el intervalo $(\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma)$ está el 95'44% de la población.
- En el intervalo $(\mu - 3 \cdot \sigma, \mu + 3 \cdot \sigma)$ está el 99'74% de la población.

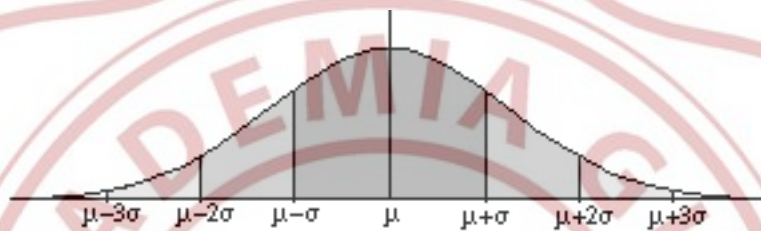


Figura 4.1: Porcentajes de población en los diferentes intervalos simétricos de una normal $N(\mu, \sigma)$.

Es evidente que a medida que el intervalo se amplía, hay mayor porcentaje de la población en él.

En general, dado un porcentaje del N%, siempre es posible encontrar un intervalo simétrico respecto de la media de forma que dicho intervalo contenga a dicho porcentaje de población.

Más explícitamente, se denomina *intervalo de probabilidad* a aquel intervalo para el cuál se sabe que hay una seguridad del N% de que los parámetros muestrales ($\bar{x}$ o $\hat{p}$) se encuentren en dicho intervalo. La seguridad N viene fijada previamente.

Si queremos que el N% de la población esté en el intervalo, denominaremos *nivel de confianza* al número:

$$1 - \alpha = \frac{N}{100}$$

y unido a este, se encuentra el llamado *nivel de significación*, que viene dado por α . Este nivel en general vendrá explicitado en las condiciones del problema, si bien los valores más comunes suelen ser del 90%, 95% y 99%.

Ejemplo: Si queremos que el 88% de la población esté en el intervalo, el nivel de confianza será $1 - \alpha = \frac{88}{100} = 0'88$, mientras que el nivel de significación será $\alpha = 1 - 0'88 = 0'12$.

4.6.1. Intervalo de probabilidad para la media muestral $\bar{x}$

Si la población sigue una distribución de parámetros μ y σ , y las muestras son de tamaño $n \geq 30$ (o bien la población ya es normal y las muestras son de cualquier tamaño), sabemos que la media muestral $\bar{x}$ sigue una distribución:

$$\bar{X} \longrightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Se trata de encontrar el valor de k como en la figura:

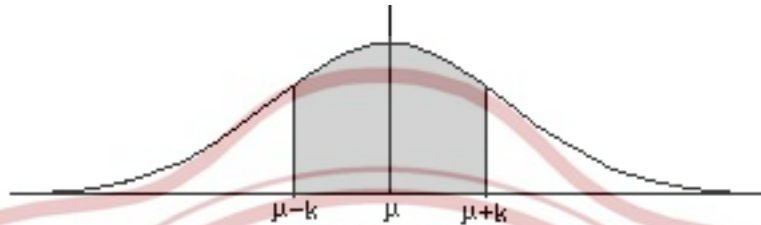


Figura 4.2: Buscamos el valor de k que deje en el intervalo $(\mu - k, \mu + k)$ al $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ de la población.

Razonemos ahora sobre la normal $Z \longrightarrow N(0;1)$ que es la que se encuentra tabulada. Si queremos que el intervalo buscado contenga a la media muestral con una confianza de $1 - \alpha$, entonces fuera del intervalo el área tiene que ser de α , y como la curva es simétrica, en cada una de las ramas fuera de la región rayada, tenemos un área de $\frac{\alpha}{2}$. Llamaremos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ al punto situado en el eje x que separa la región rayada de la otra.

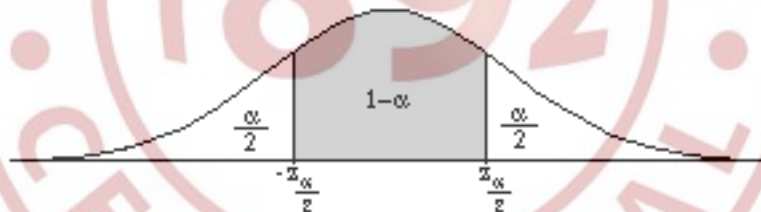


Figura 4.3: Buscamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ que deje en el intervalo $(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$ al $(1 - \alpha)$ de la población en la $N(0;1)$

Es evidente que se cumple:

$$p\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

o dicho de otro modo:

$$p\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

probabilidad que se busca *dentro de la tabla* como hemos visto anteriormente en el tema de la normal.

Ahora bien, este valor sólo sirve para la normal estándar $N(0;1)$. Nosotros manejamos la normal $N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ y para pasar a la normal estándar deberemos tipificar:

$$\frac{k - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_{\frac{\alpha}{2}}$$

de donde despejando, encontramos k , el valor buscado:

$$k = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Así, dado el nivel de significación α o el de confianza $1 - \alpha$, podemos determinar el intervalo de probabilidad para la media muestral, que será:

$$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Ejemplo Determinar, en la distribución $N(0;1)$, el valor que concentra el 75 % de la población en un intervalo simétrico respecto a la media

Ahora $1 - \alpha = 0'75$, es decir $\alpha = 0'25$ y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0'125$, es decir, buscamos el valor $z_{0'125}$, de modo que, como en la figura, dejemos el 75 % de la población en el centro.

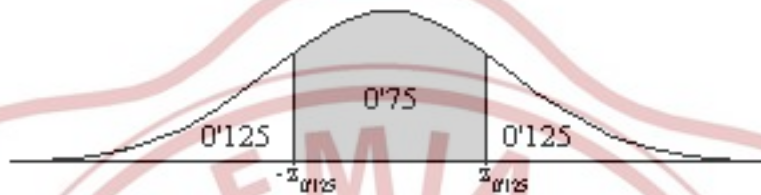


Figura 4.4: Buscamos el valor de $z_{0'125}$ que deje en el intervalo $(-z_{0'125}, z_{0'125})$ al 0'75 de la población en la $N(0;1)$

Se cumple que $p(Z \geq z_{0'125}) = 0'125$, es decir $p(Z \leq z_{0'125}) = 0'875$, y si buscamos en la tabla, resulta que el valor es:

$$z_{0'125} = 1'15$$

Ejercicio: Encuentra el valor correspondiente que concentre el 88 % de la población.

Ejemplo: Calcular el intervalo de probabilidad con un nivel de confianza del 95 % para la media de una muestra de 100 recién nacidos, sabiendo que la población de recién nacidos sigue una normal de media $\mu=3100$ gr. y desviación típica $\sigma=150$ gr.

Como el nivel de confianza es 0'95, entonces $1 - \alpha = 0'95$ y por tanto $\alpha = 0'05$ y en cada rama fuera de la región queda $\frac{\alpha}{2} = 0'025$.

Buscamos entonces $z_{0'025}$, que es el valor que deja a su derecha un área de 0'025, es decir:

$$p(Z \geq z_{0'025}) = 0'025 \implies p(Z \leq z_{0'025}) = 0'975$$

Buscando este valor dentro de la tabla se obtiene que el valor de $z_{0'025} = 1'96$, y por tanto el intervalo para la media muestral es:

$$\left(3100 - 1'96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}}, 3100 + 1'96 \cdot \frac{150}{\sqrt{100}} \right) = (3100 - 1'96 \cdot 15, 3100 + 1'96 \cdot 15) = (3070'6, 3129'4)$$

Esto significa que el 95 % de las muestras de tamaño 100 tendrá su media comprendida entre estos 2 valores: (3070'6, 3129'4)

Ejercicio: Calcular el mismo intervalo con una confianza del 99 %.

Ejercicio: Las notas de una población de 150 alumnos siguen una distribución de media 5'5 y varianza 4'1616. Extraemos muestras de tamaño 36. Calcula el intervalo de probabilidad para un nivel de confianza del: a) 75 % b) 86'64 %, e interpreta los resultados.

(NOTA: Recordemos que la varianza y la desviación típica de una distribución están relacionadas porque la varianza es el cuadrado de la desviación típica y se representa por σ^2).

4.6.2. Intervalo de probabilidad para la proporción muestral $\hat{p}$

Razonando de igual manera se puede llegar a que para el nivel de significación α el intervalo para la proporción muestral $\hat{p}$ es

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right)$$

donde p y q son las proporciones poblacionales y $n \geq 30$.

Ejercicio: Sabiendo que la proporción de alumnos con vídeo de una población de 120 alumnos es de $p=0.7$, halla el intervalo de probabilidad para la proporción de:

- las muestras de tamaño 30 con una confianza del 75 %.
- las muestras de tamaño 49 con una confianza del 90 %.
- las muestras de tamaño 49 con una confianza del 99 %.

4.7. Estimación por intervalos

La estimación anterior, la puntual, se utiliza poco, pues no tenemos datos suficientes que nos indiquen el grado de fiabilidad del dato muestral que hemos tomado. Lo que tiene más sentido plantearse es cuál es la probabilidad de que la media o proporción poblacional pertenezcan a un intervalo determinado.

4.7.1. Estimación de la media de una población μ

La media μ de una población es desconocida y deseamos conocerla. Para ello, basándonos en los intervalos de probabilidad, sabemos que si la población tiene parámetros μ y σ , la media muestral $\bar{x}$ sigue una distribución:

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

, siendo n el tamaño de la muestra, y sabemos que el intervalo de probabilidad a nivel de confianza $1 - \alpha$ para $\bar{x}$ es:

$$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

es decir, que:

$$\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

De la primera desigualdad se sigue que:

$$\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \implies \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Y de la segunda:

$$\bar{x} \leq \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies \mu \geq \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Luego se deduce que:

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Es decir, que el intervalo de confianza con nivel de confianza $1 - \alpha$ para la media poblacional μ desconocida es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

NOTA:

a) Hay que añadir que para aplicar este resultado, o bien las muestras tienen tamaño $n \geq 30$, o bien la población sigue una distribución normal.

b) Si la desviación típica de la población σ , es desconocida, se utilizará, la desviación típica muestral s en su lugar, y el intervalo sería:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

Al valor $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se le denomina *error típico o estándar*.

Ejemplo: Para estimar la media de los resultados que obtendrían al resolver un cierto test los alumnos de 4º de E.S.O. de la Comunidad de Castilla-León, se les pasa el test a 400 alumnos escogidos al azar, con los resultados de la tabla:

Puntuación	Número de alumnos
1	24
2	80
3	132
4	101
5	63

A partir de ellos, estima con un nivel de confianza del 95 % el valor de la media poblacional.

Aprovechando repasaremos el cálculo de algunos parámetros estadísticos.

Como sólo disponemos de la muestra, no conocemos la media ni la desviación típica poblacional, hemos de calcular la media y la desviación típica muestral.

Para ello, calculamos la tabla siguiente:

X	Frec. absoluta f_i	$X \cdot f_i$	X^2	$X^2 \cdot f_i$
1	24	24	1	24
2	80	160	4	320
3	132	396	9	1188
4	101	404	16	1616
5	63	315	25	1575
Total	400	1299		4723

Resulta:

$$\bar{x} = \frac{1299}{400} = 3'25$$

$$\text{Varianza} = s^2 = \frac{4723}{400} - (3'25)^2 = 11'81 - 10'56 = 1'25$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1'25} = 1'12$$

Ya tenemos los parámetros muestrales. Hemos de determinar el intervalo de confianza para μ . Como $1 - \alpha = 0'95$, resulta que $\alpha = 0'05$ y queda $\frac{\alpha}{2} = 0'025$.

Se obtiene que el valor es $z_{0'025} = 1'96$, por tanto el intervalo de confianza para μ , al 95 % es:

$$\left(3'25 - 1'96 \cdot \frac{1'12}{\sqrt{400}}, 3'25 + 1'96 \cdot \frac{1'12}{\sqrt{400}} \right) = (3'25 - 0'11, 3'25 + 0'11) = (3'14, 3'36)$$

Por tanto tenemos una confianza del 95 % de que la nota media de la población esté comprendida entre 3'14 y 3'36.

Ejercicio: De una variable estadística conocemos la desviación típica, 8, pero desconocemos la media. Para estimarla, extraemos una muestra de tamaño 60 cuya media es 37. Estimar la media poblacional con una confianza del 99 %.

Error máximo admisible:

Hemos visto que el intervalo de confianza para la media poblacional μ es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Se cumple entonces que la diferencia, en valor absoluto, entre las medias poblacional y muestral es:

$$|\mu - \bar{x}| < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Al valor

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

se le llama error máximo admisible. Dicho error tiene las siguientes propiedades:

- a) El error es **menor** cuanto mayor sea el tamaño de la muestra (n), porque dividimos por un número cada vez mayor.
- b) El error es mayor al aumentar el nivel de confianza, puesto que el valor $z_{\frac{\alpha}{2}}$ aumenta, como se observa en la tabla:

Confianza= $1 - \alpha$	$z_{\frac{\alpha}{2}}$
0'9	1'645
0'95	1'96
0'99	2'575

Para reducir el error, por tanto, no hay que aumentarla confianza, sino el tamaño de la muestra elegida.

Si conocemos el error y el nivel de confianza, podemos calcular el tamaño de la muestra, usando la fórmula del error.

Ejercicio: Al medir un tiempo de reacción, un psicólogo sabe que la desviación típica del mismo es 0'5 segundos. ¿Cuál es el número de medidas que deberá realizar para que con una confianza del 99 %, el error de estimación no exceda de 0'1 segundos?.

4.7.2. Estimación de una proporción

Si para cierta población se desconoce la proporción p de individuos que poseen cierta característica, y deseamos dar un intervalo de confianza para el valor de p , como el intervalo de probabilidad para la proporción muestral, $\hat{p}$, para el nivel de confianza $1 - \alpha$ en una muestra de tamaño n es:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right)$$

Razonando igual que en el caso anterior, concluimos que:

El intervalo de confianza para p a un nivel de confianza de $1 - \alpha$ es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

Aunque como habitualmente no se conoce p en realidad se usa:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

NOTA: a) Es necesario que $n \geq 30$ para poder aplicar esta fórmula.

b) Habitualmente en las encuestas, se suele utilizar, en lugar de la última fórmula, el valor de $p=q=0'5$, que es la situación más desfavorable.

Ejercicio: Determina el intervalo de confianza, con una significación del 0'05 para la proporción poblacional de fumadores entre los jóvenes menores de 21 años, a partir de una muestra de tamaño 900, cuando no se conocen valores de p anteriores. Considera los dos casos anteriores (usando $\hat{p}$ y $p=q=0'5$). La proporción de fumadores en la encuesta ha sido de $\hat{p} = 0'3$.

El **error máximo admisible** en este caso es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

o en caso de no conocer p :

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

Ejercicio: Para 96 familias españolas elegidas al azar se ha determinado que la TV permanece encendida en la casa una media de 217 minutos diarios, la desviación típica de la muestra fue de 40 minutos.

a) Para una fiabilidad del 95% ¿qué error se asume cuando se da por bueno ese dato para el total de las familias españolas?.

b) ¿Qué tamaño muestral sería necesario para reducir ese error a la mitad?.

NOTA: Diferencia entre intervalos de probabilidad y de confianza

En un intervalo de probabilidad *lo que conocemos es la media y desviación típica poblacionales*, y damos el intervalo donde se encontrará (para un cierto nivel de confianza) la media muestral o la proporción muestral.

Sin embargo, en un intervalo de confianza entramos ya en el terreno de la estimación, es decir NO conocemos la media poblacional (y en ocasiones tampoco la desviación típica poblacional) ni la proporción poblacional, sino que sólo *conocemos, o podemos calcular, la media muestral o la proporción muestral*, y de lo que se trata es de dar un intervalo en el que se encuentre la media poblacional (o la proporción poblacional).

Capítulo 5

TEST DE HIPÓTESIS

5.1. Introducción

En este tema trataremos el importante aspecto de la toma de decisiones, referida a decidir si un valor obtenido a partir de la muestra es probable que pertenezca a la población.

En general, la media (o proporción) en una muestra suele ser distinta a la media de la población, de la cuál se extrae la muestra. Lo normal suele ser que tal diferencia entre la media muestral y poblacional sea pequeña y debida al azar, pero podría suceder que dicha diferencia no esté justificada por el azar y se deba a un cambio en la población, y debamos modificar los datos que conocemos previamente.

Ejemplos:

a) Hace algunos años, la media de estatura de los españoles adultos varones era de 170 cm y su desviación típica 9 cm. Pasado el tiempo, un muestreo realizado a 36 adultos da una medida de 172 cm. ¿Puede afirmarse que esa diferencia de 2 cm es debida al azar o realmente la estatura media ha aumentado?.

b) Supongamos que, respecto a una determinada ley, el 52 % de los ciudadanos está en contra. Pasado el tiempo, una encuesta realizada a 400 personas indica que los ciudadanos en contra han descendido hasta el 49 %. ¿Ha cambiado realmente la opinión pública o tal resultado es debido al azar?.

c) El porcentaje de aprobados en las PAU en un determinado distrito universitario ha sido del 82 %. En una ciudad de ese distrito, el porcentaje de aprobados fue del 86 %. ¿Puede afirmarse con un nivel de confianza del 90 % que los resultados en esa ciudad son superiores a la media?.

Los métodos de decisión estadística están ligados a los de estimación de parámetros mediante los intervalos de confianza, aunque también aparecerán otros nuevos conceptos.

5.2. Hipótesis estadísticas

Trataremos de utilizar los datos obtenidos en una muestra para tomar decisiones sobre la población. Para ello, debemos realizar ciertos supuestos o conjeturas sobre las poblaciones. Estos supuestos, que pueden ser o no ciertos, se llaman hipótesis estadísticas.

Podemos, entonces, definir el *test de hipótesis o contraste de hipótesis* como el procedimiento estadístico mediante el cuál se investiga la verdad o falsedad de una hipótesis acerca de una población o poblaciones.

Dichas hipótesis se formularán sobre la media poblacional μ o la proporción poblacional p .

Llamaremos *hipótesis nula*, y se representa por H_0 , a la hipótesis que se formula y por tanto se quiere contrastar o rechazar, e *hipótesis alternativa*, y se representa por H_1 , a cualquier otra hipótesis que sea diferente de la formulada, y que sea contraria a H_0 , de forma que la aceptación de la hipótesis nula H_0 implica el rechazo de la alternativa H_1 y viceversa, el rechazo de H_0 implica la aceptación de H_1 .

En un problema de contraste de hipótesis, pues, siempre tiene que formularse una hipótesis nula H_0 , y ha de ir acompañada de una alternativa, H_0 que es la que aspira a desplazar a la nula.

Ejemplo: Un investigador afirma que la temperatura del cuerpo humano en un adulto sano se distribuye según una normal de media $\mu = 37^\circ$ C y desviación típica $\sigma = 0'9^\circ$ C. Formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa

A la vista de los datos, el investigador afirma que la temperatura media del cuerpo humano es 37° , es decir la hipótesis o conjetura que formula es:

$$H_0 = 37 \quad (\text{hipótesis nula})$$

Como hipótesis alternativa, hemos de tomar aquella contraria a esta, que la media sea distinta de 37° C, es decir:

$$H_1 \neq 37 \quad (\text{hipótesis alternativa})$$

Si la hipótesis nula fuese del tipo $\mu \geq k$ la hipótesis alternativas sería: $\mu < k$.

5.3. Errores

Hay ocasiones en que la hipótesis nula, H_0 , es cierta, pero a la vista de la muestra tengamos que rechazarla. En tal caso, estamos cometiendo un error.

El error que consiste en rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera, se denomina *error de tipo I*.

Otro tipo de error puede ocurrir cuando, siendo H_0 falsa, las evidencias de la muestra, sin embargo, nos lleven a aceptarla.

Este error, cometido al aceptar cuando ésta es falsa, se denomina *error de tipo II*. Resumiendo:

Decisión	Situación	
	H_0 verdadera	H_1 verdadera (H_0 falsa)
Mantener H_0	Decisión correcta Probabilidad= $1 - \alpha$	Decisión incorrecta: ERROR DE TIPO II Probabilidad= β
Rechazar H_0	Decisión incorrecta: ERROR DE TIPO I Probabilidad= α	Decisión correcta Probabilidad= $1 - \beta$

donde α es el nivel de significación y $1 - \alpha$ es el nivel de confianza.

Con esta notación y utilizando probabilidades condicionadas:

$$\alpha = p(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ es cierta}) = p(\text{Error de tipo I})$$

y

$$\alpha = p(\text{Aceptar } H_0 / H_0 \text{ es cierta})$$

Por otra parte:

$$\beta = p(\text{Aceptar } H_0 / H_0 \text{ es falsa}) = p(\text{Error de tipo II})$$

y

$$1 - \beta = p(\text{Rechazar } H_0 / H_0 \text{ es falsa})$$

A la probabilidad $1 - \beta$ se le denomina *potencia del contraste*.

5.4. Región crítica y región de aceptación

Sabemos ya formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. Lo que necesitamos ahora es un criterio para saber si debemos aceptar una u otra, es decir, ¿con cuál de las dos hipótesis nos quedamos?.

Al tener ya formulada la hipótesis nula, es necesario que las evidencias sean muy fuertes para rechazarla; es decir, puede que haya cambios debidos al azar, en cuyo caso el cambio no es significativo, y no cambiamos, pero puede que los cambios sean debidos a otras causas. En este último caso es cuando el cambio es significativo y rechazaremos.

Por lo tanto, lo primero que debemos hacer es fijar un cierto intervalo dentro del cuál es normal que haya cambios, es decir, una región tal que si el parámetro se mantiene en dicho intervalo, nos seguimos quedando con H_0 , pues esas pequeñas variaciones son debidas al azar. Ese intervalo o región se denomina *región de aceptación*, y será mayor o menor dependiendo del nivel de confianza que precisemos, $1 - \alpha$.

La región que quede fuera de la región de aceptación indica que en este caso los cambios no se pueden atribuir al azar, y por tanto hemos de rechazar H_0 y aceptar H_1 . Tal región se llama *región crítica o de rechazo*.

Llegados a este punto, hemos de distinguir entre dos tipos de contraste o test, que determinan la región de aceptación y la región de rechazo.

1. **Contraste bilateral (o de dos colas):** En este caso la región de rechazo o región crítica está formada por dos conjuntos de puntos disjuntos. Dicho caso se presenta cuando la hipótesis nula es del tipo $H_0 : \mu = k$ (o bien $H_0 : p = k$) y la hipótesis alternativa, por tanto, es del tipo $H_1 : \mu \neq k$ (o bien $H_1 : p \neq k$).

La región crítica para un cierto nivel α sería, en la $N(0;1)$:

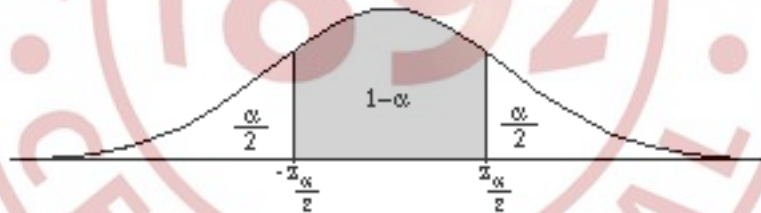


Figura 5.1: El intervalo $(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$ es la Región de Aceptación. La región no sombreada es la Región crítica, formada por dos partes o colas.

Fijémonos en que el nivel de significación α se concentra en dos partes (o colas) simétricas respecto de la media.

La región de aceptación en este caso no es más que el correspondiente intervalo de probabilidad para $\bar{x}$ o $\hat{p}$, es decir:

$$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

o bien:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right)$$

Las correspondientes regiones críticas serán:

$$\left(-\infty, \mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \cup \left(\mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right)$$

o bien

$$\left(-\infty, p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right) \cup \left(p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, \infty \right)$$

2. **Contraste unilateral (o de una cola):** En este caso la región crítica está formada por un sólo conjunto de puntos.

Como se observa en las figuras, el nivel de significación α se concentra sólo en una parte o cola.

Este caso se presenta cuando la hipótesis nula es del tipo $H_0 : \mu \geq k$ (o bien $H_0 : p \geq k$) y la hipótesis alternativa, por tanto, es del tipo $H_1 : \mu < k$ (o bien $H_1 : p < k$). (También si aparece $\leq$)

A nivel de confianza $1 - \alpha$, las regiones serían, en la $N(0;1)$:

- a) Unilateral por la derecha:

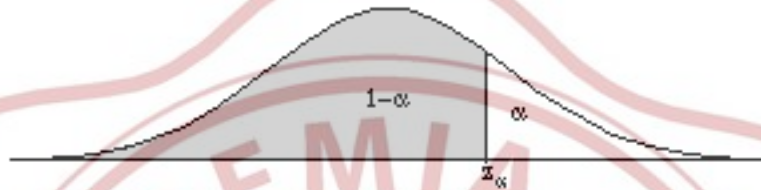


Figura 5.2: El intervalo $(-\infty, z_\alpha)$ es la Región de Aceptación. La región no sombreada es la Región crítica, formada por una partes o cola. El nivel α se concentra ahí.

La región de aceptación en este caso será:

$$\left(-\infty, \mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

o bien:

$$\left(-\infty, p + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

Las correspondientes regiones críticas serán:

$$\left(\mu + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

o bien

$$\left(p + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, \infty\right)$$

- b) Unilateral por la izquierda:

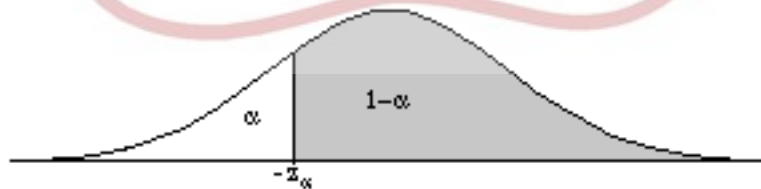


Figura 5.3: El intervalo (z_α, ∞) es la Región de Aceptación. La región no sombreada es la Región crítica, formada por una partes o cola. El nivel α se concentra ahí.

La región de aceptación en este caso será:

$$\left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$$

o bien

$$\left(p - z_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, \infty \right)$$

Las correspondientes regiones críticas serán:

$$\left(-\infty, \mu - z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

o bien:

$$\left(-\infty, p - z_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right)$$

En todos los casos, conociendo el nivel de confianza $1 - \alpha$, tendremos que determinar el valor $z_{\frac{\alpha}{2}}$ (para contrastes bilaterales) o bien z_{α} (para contrastes unilaterales), que separa las regiones de rechazo y aceptación.

Algunos de estos valores más comunes se dan en la tabla adjunta, que en los bilaterales son los mismos que para intervalos de confianza o probabilidad, ya vistos con anterioridad:

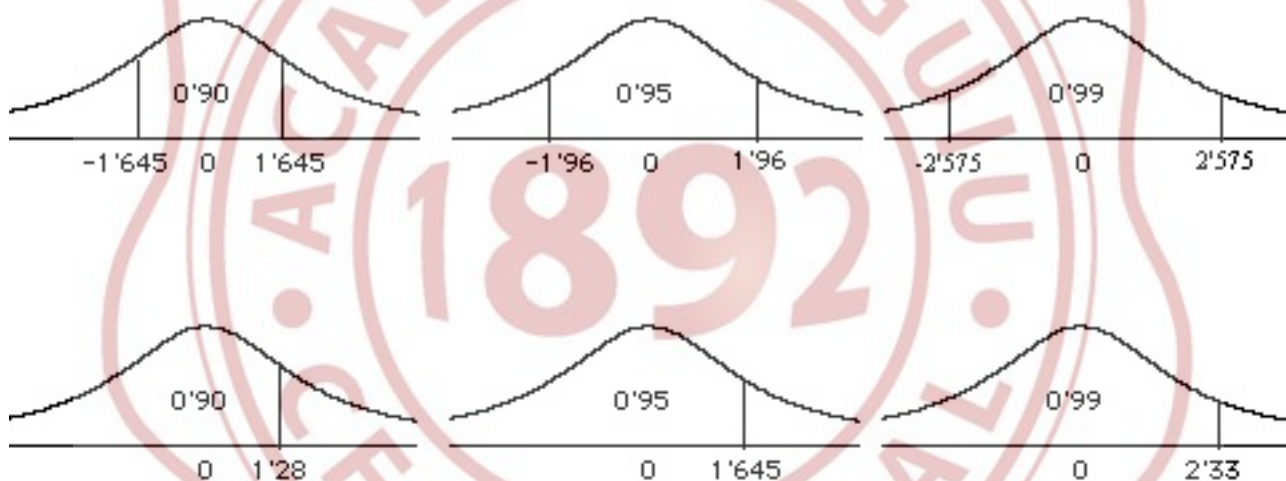


Figura 5.4: Valores más comunes para contrastes bilaterales y unilaterales derechos. Los correspondientes para los unilaterales izquierdos son negativos.

5.5. Etapas de la prueba de hipótesis

Los procedimientos seguidos en las pruebas de hipótesis correspondientes a las situaciones de decisión estadística se encuentran totalmente prefijados y se llevan a cabo en una serie de etapas que facilitan su comprensión, y que son:

1. Enunciar la hipótesis nula H_0 y la alternativa H_1 .

Deben ser excluyentes entre sí. Analizar, una vez enunciadas, si el contraste es bilateral o unilateral (Es bilateral si la hipótesis alternativa es del tipo $\neq$ y unilateral si es del tipo $>$ o $<$).

2. Determinar el valor $z_{\frac{\alpha}{2}}$ (para contrastes bilaterales) o bien z_{α} (para contrastes unilaterales), que separa las regiones de rechazo y aceptación, a partir del nivel de confianza $1 - \alpha$ o el de significación α .

3. Determinar la distribución que sigue el parámetro muestral ($\bar{x}$ o $\hat{p}$) y en base a ella y al valor obtenido en la etapa anterior, escribir las correspondientes regiones de aceptación y rechazo.
4. Calcular el estadístico usado en la prueba (en nuestro caso, calcular media muestral $\bar{x}$ o proporción muestral $\hat{p}$, a partir de la muestra).
5. Aplicar el test, es decir, dependiendo de si el estadístico cae en la región de aceptación o de rechazo, tomar la decisión de aceptar una de las dos hipótesis.

A continuación se ofrecen algunos ejemplos de problemas de test de hipótesis:

1. La vida media de una muestra de 100 tubos fluorescentes producidos por una empresa es de 1570 horas, una desviación típica de 120 horas. Si es la vida media media de los tubos de dicha empresa, ¿se puede afirmar a nivel de significación 0'05 que la duración media de los tubos es de 1600 horas?.

Determinar los errores de tipo I y II

Etapa 1: Queremos saber si la duración media de los tubos es de 1600 horas, es decir, que nuestra hipótesis nula es $H_0 : \mu = 1600$.

Por lo tanto, la hipótesis alternativa será que la duración no sea de 1600 horas, es decir, la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu \neq 1600$.

Por tanto estamos ante un contraste bilateral.

Etapa 2: A nivel de significación $\alpha = 0'05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0'95$, y realizando el dibujo habitual (hacer como ejercicio), obtenemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0'025} = 1'96$.

Etapa 3: Determinemos la distribución de la media muestral, $\bar{x}$, teniendo en cuenta que como la desviación típica de la población no la conocemos, tomamos la muestral, que es $s = 120$, y por tanto sabemos que la media muestral sigue una normal:

$$N\left(1600; \frac{120}{\sqrt{100}}\right) = N(1600; 12)$$

Por tanto la región de aceptación será el intervalo de probabilidad:

$$\left(1600 - \frac{120}{\sqrt{100}}, 1600 + \frac{120}{\sqrt{100}}\right) = (1600 - 1'96 \cdot 12, 1600 + 1'96 \cdot 12) = (1576'48, 1623'52)$$

De modo que, Región de Aceptación: (1576'48, 1623'52)

Región de Rechazo: $(-\infty, 1576'48) \cup (1623'52, \infty)$

Etapa 4: En la muestra se ha obtenido que $\bar{x} = 1570$.

Etapa 5: Para aplicar el test, simplemente hemos de comprobar si el valor de $\bar{x}$ está dentro de la región de aceptación o de la de rechazo.

Como en este caso se observa que

$$1570 \notin (1576'48, 1623'52)$$

es decir, 1570 no está en la región de aceptación, sino en la de rechazo.

Por tanto, hemos de rechazar que la media es 1600 (hipótesis nula) y aceptar la alternativa.

A este nivel de confianza *no se puede afirmar que la duración media de los tubos sea de 1600 horas.*

En cuanto a los errores:

Error de tipo I es afirmar que la duración media no es de 1600 horas cuando en realidad sí lo es.

Error de tipo II es afirmar que la duración media es de 1600 horas cuando en realidad no lo es.

2. Una encuesta, realizada a 64 empleados de una fábrica, concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma era de 6'5 años con una desviación típica de 4. ¿Sirve esta afirmación para aceptar, con un nivel de significación del 5 %, que el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6? Justificar adecuadamente la respuesta.

El enunciado no puede ser más claro a la hora de determinar las hipótesis nula y alternativa. Queremos comprobar si el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6, luego la hipótesis alternativa será que dicho tiempo medio de empleo sea MAYOR que 6, es decir:

$$H_0 : \mu \leq 6$$

o simplemente $H_0 : \mu = 6$ (lo que queremos comprobar) frente a:

$$H_1 : \mu > 6$$

Es claramente un contraste unilateral. La región de aceptación será

$$\left(-\infty, \mu + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

puesto que aceptamos todos los valores menores que un cierto tope. Notemos que concemos el valor de s (en la muestra) y no el de σ , pero eso no influye en la fórmula. La región de rechazo, por tanto, es:

$$\left(\mu + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty \right)$$

Para calcular el nivel $z_\alpha = z_{0'05}$, y por tanto $z_{0'05} = 1'645$. Así pues, la región de aceptación es, puesto que $\mu = 6$, $s = 4$ y $n = 64$, resulta ser, aproximadamente:

$$(-\infty, 6'8225)$$

Y la región crítica:

$$(6'8225, \infty)$$

Como en la muestra resulta que $\bar{x} = 6'5$, que pertenece a la región de aceptación, es decir, aceptamos la hipótesis nula, la media es de 6 años, al 95 % de confianza.

3. Un investigador, utilizando información de anteriores comicios, sostiene que, en una determinada zona, el nivel de abstención en las próximas elecciones es del 40 % como mínimo. Se elige una muestra aleatoria de 200 individuos para los que se concluye que 75 estarían dispuestos a votar. Determinar, con un nivel de significación del 1 %, si se puede admitir como cierta la afirmación del investigador.

Se trata ahora de un contraste de proporciones. La hipótesis a contrastar está muy clara: El investigador dice que el nivel de abstención es de un 40 % por lo menos, es decir, sólo rechazaremos su hipótesis cuando la proporción sea menor que este valor, es decir:

$$H_0 : p \geq 0'4$$

o simplemente $H_0 : p = 0'4$ (lo que dice el investigador) frente a:

$$H_1 : p < 0'4$$

(la proporción de abstención es menor)

Así pues la región de aceptación es:

$$\left(p - z_\alpha \sqrt{\frac{pq}{n}}, \infty \right)$$

Y la de rechazo:

$$\left(-\infty, p - z_{\alpha} \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Para calcular el nivel $z_{\alpha} = z_{0'01}$, y por tanto $z_{0'01} = 2'33$. Así pues, la región de aceptación es, puesto que $p = 0'4$, $q = 0'6$ y $n = 200$, resulta ser, aproximadamente:

$$(0'3192, \infty)$$

Y la región crítica:

$$(-\infty, 0'3192)$$

Como en la muestra resulta que

$$\hat{p} = \frac{125}{200} = 0'625$$

, los 125 que no votan de los 200 a los que se pregunta. Al 99 % de confianza entonces, resulta que dicho valor en la muestra pertenece a la región de aceptación, es decir, aceptamos la hipótesis nula y el investigador tiene razón, la abstención será, al menos del 40 %.





EXÁMENES DE UNED – LOE



Criterios de corrección de la asignatura Matemáticas II.

A la hora de corregir la prueba práctica de esta asignatura deben tenerse en cuenta las siguientes consideraciones:

- a) Al alumno sólo se le corrigen las cuestiones prácticas de una de las dos opciones. Para tal fin se considerará la opción elegida por el alumno, aquella a la que corresponda la primera cuestión resuelta.
- b) Cada problema posee un valor comprendido entre 0 y 2.5 puntos. Para que un problema se valore con su valor máximo, no sólo debe estar resuelto correctamente y con exactitud, sino que debe estar oportunamente fundamentado, ordenada su presentación y explicado.
- c) La falta total, o parcial, de orden, fundamentación o explicaciones puede hacer que un problema **pierda hasta un 30% de su valor máximo**.
- d) El uso incorrecto del idioma puede hacer disminuir un 10% el valor de un problema.
- e) Los problemas de representación de gráficas de funciones que son resueltos mediante cálculo de valores numéricos con calculadora no se valorarán.
- f) La simplificación de la expresión de una función presenten puede hacer que el problema adquiera su valor mínimo.
- g) La utilización del signo “=” para unir cosas que no son iguales, como si de un símbolo “,” se tratara, puede invalidar el cálculo.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 01
				Hoja: 1 de 1	

Matemáticas II: 01

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Resuelva, dependiendo del valor de λ , el siguiente sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} x - y - z - \lambda \\ 2y + 3z + 3x\lambda - 0 \\ 3z - 3x + 3y\lambda - 0 \end{cases}$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la posición relativa, dependiendo del valor del parámetro λ , del plano

$$\pi \equiv 6 - 6z - 6x\lambda - 4y = 0, \text{ y la recta } r \equiv \begin{cases} 2z - 2x + 2y\lambda - 4 = 0 \\ x - y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Se considera la función $f(x) = \frac{\ln 2x}{x}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f . Nota: $\ln x$ designa el logaritmo neperiano de x .

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule el área de la región del plano delimitada por las gráficas de las funciones siguientes: $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x$ y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Calcule, en función de a , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Halle unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A = (0, 2, -1)$ y corta a las dos rectas: $r = \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} \frac{1}{-2}x \\ \frac{1}{-2}y \\ \frac{z}{-4} \end{cases}$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int e^x \sin x \, dx$. Nota: $\sin x$ representa el seno de x , y puede escribirlo como $\text{sen } x$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 03
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 03

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la existencia de una matriz A tal que $A \times A = I$, y calcúlela en caso afirmativo. Observación: $A \times A$ representa el producto de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ donde } a + d \neq 0 \text{ y } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine el punto Q que es el simétrico del punto $P = (2, 1, -3)$ respecto al plano que determinan los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$. Observación El punto Q es la imagen especular del punto P supuesto que el plano fuera un espejo.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 5}{-x^3 - 2x^2 + x - 2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ ¿Para qué valores de λ la matriz A no tiene inversa?

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + 5y - 4z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0$, y $\pi_3 \equiv -3x - 4y + 5z - 4 = 0$. Estudie el número de rectas que determinan estos tres planos.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \ln(x + 1) dx$. Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 05
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 05

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si el sistema S_λ posee solución, dependiendo del valor de λ , $S_\lambda \equiv \begin{cases} \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \\ \lambda x - \lambda y - z = 1 \\ \lambda x - y - z = \lambda \end{cases}$.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la posición relativa, dependiendo del valor del parámetro λ , del plano

$$\pi \equiv 3\lambda x + 2y + 3z - 3 = 0, \text{ y la recta } r \equiv \begin{cases} x - \lambda y - z + 2 = 0 \\ x - y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie el crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{2^x}{2^{2x} + 2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Resuelva, dependiendo del valor de λ , el siguiente sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 2\lambda x + 2y + 3\lambda z = 1 \\ \lambda x - \lambda y - z = 2 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Halle a y b para que los tres planos $\pi := x + 2y - z = 1$, $\pi' := 2x + y + az = 0$ y $\pi'' := -3x + 3y - 2z = b$ contengan a una misma recta r . Determine unas ecuaciones paramétricas de r .

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Calcule $\int x^2 \sin 2x \, dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 07
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 07

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine el conjunto de números reales α para los que el rango de la matriz A es menor que 3.

Nota: A^T representa la matriz traspuesta de A .

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la distancia del punto $A = (1, 1, 1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcular $\int \frac{5x - 2}{x^2 - 4} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Hállese una matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A X A^{-1} = C$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Halles a y b para que los tres planos $\pi = x + 2y - z = 1$, $\pi' = 2x + y + az = 0$ y $\pi'' = 3x + 3y - 2z = b$ contengan a una misma recta r . Determine unas ecuaciones paramétricas de r .

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la gráfica de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Nota: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 2x \, dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 09
				Hoja: 1 de 1	

Matemáticas II: 09

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si el sistema S_λ posee solución, dependiendo del valor de λ . $S_\lambda \equiv \begin{cases} \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \\ \lambda x - \lambda y - z = 1 \\ \lambda x - y - z = \lambda \end{cases}$.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie, y determine en caso de existir, el plano que contiene a los puntos $A = (1, 2, 1)$ y $B = (7, 0, 0)$, y que es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 5}{-x^3 + 2x^2 + x - 2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 2 & 0 & -a \end{pmatrix}$ donde a y b son números no nulos, determine A^{-1} .

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + my - z = 6$. Determine m para que r sea paralela a π .

Calcule, para dicho valor de m , la distancia entre r y π .

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la gráfica de la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int x \cos x \, dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 11
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 11

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la existencia de una matriz A tal que $A \times A = I$, y calcúlela en caso afirmativo. Observación: $A \times A$ representa el producto de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ donde } a + d \neq 0 \quad \text{y} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine el punto Q que es el simétrico del punto $P = (2, 1, -3)$ respecto al plano que determinan los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$. Observación El punto Q es la imagen especular del punto P supuesto que el plano fuera un espejo.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2 - 3x + 2}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{6x^2 - 1}{8x^2 + 2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Calcule, en función de a , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados los planos π_1, π_2, π_3 , estudie el número de rectas que determinan estos tres planos.

$$\pi_1 \equiv 3x + 5y - 4z - 1 = 0, \pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0, \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv -3x - 4y + 5z - 4 = 0.$$

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{-1}{x^2 - x}$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \ln(x + 1) dx$. Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

 03100305		Matemáticas II (F.G.)			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 13
				Hoja: 1 de 1	

Matemáticas II: 13

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Resuelva el sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 3\lambda x + 2y + 3z = 1 \\ x - \lambda y - z = 1 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$, para aquellos valores de λ , que hacen al sistema compatible y determinado.

2 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

De un paralelogramo $ABCD$ se conocen únicamente los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (-1, 2, 1)$ y $C = (-2, 0, 4)$. Se pide determinar el cuarto punto D y el área del triángulo CDA .

3 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Se considera la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

Nota: $\ln x$ designa el logaritmo neperiano de x .

4 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Calcular $\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Hállese una matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A X A^{-1} = C$.

6 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + 5y - 4z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0$, y $\pi_3 \equiv -3x - 4y + 5z - 4 = 0$. Estudie el número de rectas que determinan estos tres planos.

7 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = -x^4 + 4x^2$.

8 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Calcule la integral $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. Nota: $\ln x$ designa el logaritmo neperiano de x .

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
			PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 02
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 02

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la existencia de una matriz X tal que $AX = B$, y calculela en caso de existir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine el plano que contiene al punto $A = (1, -1, 1)$ y que es perpendicular a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 10x + 5y + 8z - 2 = 0 \\ 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine las ecuaciones de todas las rectas asintotas de la función $f(x) = \frac{2}{x^5 - x^7}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{1}{4 + 25x^2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcule la matriz inversa de A .

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} 4x + 3y + z - 2 = 0 \\ 3x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + my - z = 6$.

Determine m para que r sea paralela a π . Calcule, para dicho valor de m , la distancia entre r y π .

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{x^6}{x^6 + 1}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int (\cos x)e^x dx$.

 03100564		Matemáticas II (F.E.)			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 04
				Hoja: 1 de 1	

Matemáticas II: 04

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si el sistema S_λ posee solución, dependiendo del valor de λ , $S_\lambda \equiv \begin{cases} \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \\ \lambda x - \lambda y - z = 1 \\ \lambda x - y - z = \lambda \end{cases}$.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la posición relativa, dependiendo del valor del parámetro λ , del plano

$$\pi \equiv 3\lambda x + 2y + 3z - 3 = 0, \text{ y la recta } r \equiv \begin{cases} x - \lambda y - z + 2 = 0 \\ x - y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x$ y el intervalo $[-2, 1]$ del eje OX .

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + a^2z = a^2 \end{cases}$. Determine la solución, en función de $a \in \mathbb{R}$ en el caso de que sea compatible y determinado.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Se consideran la recta $r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + my - z = 6$.

Determine m para que r sea paralela a π .

Calcule, para dicho valor de m , la distancia entre r y π .

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ haciendo uso del estudio del crecimiento y extremos relativos de f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \ln(x+1) dx$. Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
			PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 06
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 06

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Resuelva el sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 3\lambda x + 2y + 3z = 1 \\ x - \lambda y - z = 1 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$, para aquellos valores de λ , que hacen al sistema compatible y determinado.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado el plano π de ecuación general $x + y - z = 0$, determine la ecuación general de cada uno de los planos paralelos que distan $\sqrt{3}$ unidades del plano π .

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2 - 3x - 2}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x$ y el intervalo $[-2, 1]$ del eje OX .

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ donde a y b son números no nulos, determine A^4 .

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si existe algún punto común a las rectas r_1 y r_2 . En caso de no existir, determine la distancia entre ambas rectas.

$$r_1 = \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 = \begin{cases} 2x + 2y - z - 3 = 0 \\ x - 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Calcule $\int x^2 \sin 2x \, dx$.

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 08
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 08

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados dos números a y b , no nulos, estudie si la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa. En caso afirmativo, calcúlala.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado el plano π de ecuación general $x + y + z = 0$, determine la ecuación general de cada uno de los planos paralelos que distan $\sqrt{3}$ unidades del plano π .

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2 - 3x - 2}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{9}{16 + 25x^2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Estudie si existe la matriz inversa de A . En caso afirmativo, calcúlala.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la ecuación general de un plano que contiene al origen de coordenadas y es perpendicular a los planos que determinan la recta de ecuación general $r = \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -1 \\ a - 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ b/x & \text{si } 1 < x \end{cases}$.

Determine los valores de a y b para que f sea continua en toda la recta real.

Una vez determinados los valores de a y b en el apartado anterior, estudie la derivabilidad de f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int e^{x+1} \cos x \, dx$.

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 10
Hoja: 1 de 1				

Matemáticas II: 10

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si existe alguna matriz X tal que $A \times X \times B = C$, y en caso afirmativo, calcúlala.

Observación: $A \times X$ representa el producto de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie, y determine en caso de existir, el plano que contiene a los puntos $A = (1, 2, 1)$ y

$$B = (7, 0, 0), \text{ y que es perpendicular a la recta } r = \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}.$$

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int (e^x + 2)(e^{x+1} - 1)dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ ¿Para qué valores de λ la matriz A no tiene inversa?

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la recta s que está contenida en los planos π_1 y π_2 , donde π_1 es el plano que contiene al origen y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$, y π_2 es el plano que pasa por el origen y es paralelo al plano $\pi \equiv 3x + 2y + 3z - 2 = 0$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = -x^4 + 4x^2$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int x^2 \lg^2(x^3) dx$. Observación: $\lg x$ es la tangente de x .

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 12
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 12

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la existencia de una matriz A tal que $A \times A = I$, y calcúlela en caso afirmativo. Observación: $A \times A$ representa el producto de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ donde } a + d \neq 0 \quad y \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado el plano π de ecuación general $x + y + z = 0$, determine la ecuación general de cada uno de los planos paralelos que distan $\sqrt{3}$ unidades del plano π .

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie el crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_1^e \ln(x^4) dx$. Observación: $\ln x$ representa el logaritmo neperiano de x .

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & b & 0 \\ 2 & 0 & -a \end{pmatrix}$ donde a y b son números no nulos, determine la matriz A^4 .

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + my + z = 6$. Determine m para que r sea paralela a π .

Calcule, para dicho valor de m , la distancia entre r y π .

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 8x^2$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \ln(x + 1) dx$. Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 14
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 14

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Dados dos números a y b , no nulos, estudie si la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa. En caso afirmativo, calcúlala.

2 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta s , proyección ortogonal de r sobre π .

3 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$.

4 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Calcule $\int (2x^3 + 4x^2 + 2x)^3 dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Hállese una matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A X A^{-1} = C$.

6 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + my + z - 6$. Determine m para que r sea paralela a π .

Calcule, para dicho valor de m , la distancia entre r y π .

7 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 8x^2$.

8 Calcule el área de la región del plano delimitada por las gráficas de las funciones siguientes:

$f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sin x$ definidas en el intervalo $[0, \frac{3\pi}{4}]$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
	Septiembre - 2014	Duración: 90min.		MODELO 15	
				Hoja: 1 de 1	

Matemáticas II: 15

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la existencia de una matriz A tal que $A \times A = I$, y calcúlela en caso afirmativo.
Observación: $A \times A$ representa el producto de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ donde } a + d \neq 0 \quad y \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la posición relativa, dependiendo del valor del parámetro λ , del plano

$$\pi \equiv 3\lambda x + 2y + 3z - 3 = 0, \text{ y la recta } r \equiv \begin{cases} x - \lambda y - z + 2 = 0 \\ x - y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la existencia de rectas asíntotas correspondiente a la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\ln x^2}{x + \sqrt[3]{x}}. \text{ Observación: } \ln x \text{ es el logaritmo neperiano de } x.$$

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

$$\text{Calcule } \int \frac{2^x}{2^{2x} + 2} dx.$$

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Hállese una matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A^{-1} = C$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la recta s que está contenida en los plano π_1 y π_2 , donde π_1 es el plano que contiene al origen y es perpendicular la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$, y π_2 es el plano que pasa por el origen y es paralelo al plano $\pi \equiv 3x + 2y + 3z - 2 = 0$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 8x^2$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

$$\text{Calcule } \int (x + \cos^3 x) dx.$$

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Septiembre - 2014	Duración: 90min.		MODELO 16
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 16

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Determine el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+5 & a+7 \\ a+6 & a+9 & a+12 \end{vmatrix}$.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado el plano π de ecuación general $x + y + z = 0$, determine la ecuación general de cada uno de los planos paralelos que distan $\sqrt{3}$ unidades del plano π .

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_1^e \ln x^4 dx$. Observación: $\ln x$ representa el logaritmo neperiano de x .

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Resuelva, dependiendo del valor de λ , el siguiente sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 2\lambda x + 2y + 3\lambda z = 1 \\ \lambda x - \lambda y - z = 2 \\ x + y + z = \lambda \end{cases}$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si existe algún punto común a las rectas r_1 y r_2 . En caso de no existir, determine la distancia entre ambas rectas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad r_2 \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ x - 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = e^x(x-2)$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles extremos relativos, convexidad y posibles puntos de inflexión de la función f . Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int (x + \cos^3 x) dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Septiembre - 2014	Duración: 90min.		MODELO 17
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 17

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine el conjunto de números reales α para los que el rango de la matriz A es menor que 3.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & \alpha \\ \alpha & \alpha & a \end{pmatrix}. \text{ Observación: } A^T \text{ representa la matriz traspuesta de } A.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado el plano π de ecuación general $x + y + z = 0$, determine la ecuación general de cada uno de los planos paralelos que distan $\sqrt{3}$ unidades del plano π .

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

Nota: $\ln x$ designa el logaritmo neperiano de x .

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

$$\text{Calcule } \int \frac{2^x}{2^{2x} + 2} dx.$$

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Hállese una matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A X A^{-1} = C$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Halle unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(3, 5, 1)$ y corta a

$$\text{las dos rectas: } r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}.$$

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = e^x(x - 2)$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles extremos relativos, convexidad y posibles puntos de inflexión de la función f . Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

$$\text{Calcule } \int \cos^2(3x) dx.$$

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Septiembre - 2014	Duración: 90min.		MODELO 18
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 18

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Dados dos números a, b distintos, determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & b \\ 4 & a^2 & b^2 \end{pmatrix}$ posee inversa en función de los valores de a y b .

2 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Estudie la posición relativa, dependiendo del valor del parámetro λ , del plano

$$\pi \equiv 3\lambda x + 2y + 3z - 3 = 0, \text{ y la recta } r \equiv \begin{cases} x - \lambda y - z + 2 = 0 \\ x - y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

3 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$.

4 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Calcular $\int \frac{5x - 2}{x^2 - 4} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Calcule, en función de a , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

6 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + my - z = 6$.

Determine m para que r sea perpendicular a π . Calcule, para dicho valor de m , el punto de intersección.

7 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Sea la función $f(x) = e^x(x - 2)$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles extremos relativos, convexidad y posibles puntos de inflexión de la función f . Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Calcule $\int \cos^2(3x) dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Septiembre - 2014	Duración: 90min.		MODELO 19
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 19

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados dos números a y b , no nulos, estudie si la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la distancia del punto $A = (1, 1, 1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{-x^3 + 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Estudie si existe la matriz inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + 5y + 4z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0$, y $\pi_3 \equiv -3x - 4y + 5z - 4 = 0$. Estudie el número de rectas que determinan estos tres planos.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3x - x^2}$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \ln(x+1) dx$. Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Septiembre - 2014	Duración: 90min.		MODELO 20
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 20

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Estudie si el sistema S_λ posee solución, dependiendo del valor de λ , $S_\lambda \equiv \begin{cases} \lambda x + 2y + \lambda z = 2 \\ \lambda x - \lambda y + z = 1 \\ \lambda x - y - z = \lambda \end{cases}$.

2 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Estudie la posición relativa, dependiendo del valor del parámetro λ , de los tres planos siguientes: $\pi_1 \equiv 3\lambda x + 2y + 3z = 0$, $\pi_2 \equiv x - \lambda y + z = 0$, $\pi_3 \equiv x - y + z - \lambda = 0$.

3 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Se considera la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

Nota: $\ln x$ designa el logaritmo neperiano de x .

4 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Calcular $\int \frac{5x - 2}{x^2 - 4} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, Estudie si existe la matriz inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

6 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Estudie si existe algún punto común a las rectas r_1 y r_2 . En caso de no existir, determine la distancia entre ambas rectas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 & 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 & 0 \\ x - 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

7 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 8x^2$.

8 Ejercicio (valor 2,5 puntos)

Calcule $\int \ln(x+1) dx$. Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

 03100305	 Junio - 2015	Matemáticas II (F.G.)			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Duración: 90min.		MODELO 01	
				Hoja: 1 de 1	

Matemáticas II: 01

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados dos números a y b , tales que $ab \neq 0$, estudie si la matriz A^t es inversible. En caso

afirmativo, calcule su inversa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la posición relativa de los tres planos siguientes según valor del parámetro λ .

$$\pi_1 \equiv 3\lambda x + 2y + 3z = 0, \quad \pi_2 \equiv x - \lambda y - z = 0, \quad \pi_3 \equiv x - y - z - \lambda = 0.$$

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie todas las rectas asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{x^2 - 3x + 2}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)^3 (x - 1) dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la ecuación matricial $A^2 = I - 2A$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Pruebe que A es inversible y determine la matriz A^{-1} en función de A .

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado el plano $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$, determine todos los planos que contienen a los puntos $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y forman un ángulo de 30° con el plano π .

$$\text{Observación: } \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 8x^2$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \ln(x + 1) dx$.

Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 02
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 02

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados dos números a y b , no nulos, estudie si la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la recta r_1 que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, 0)$, y la recta r_2 que pasa por los puntos $C = (-1, 0, 1)$ y $D = (0, 3, 0)$. Estudie si las dos rectas definen un plano que las contiene. ¿Cuál es su ecuación general?

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{5x - 2}{x^2 - 4} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, estudie si existe la matriz inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

¿Qué relación existe entre los coeficientes de la ecuación del plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ para que π sea perpendicular a la recta $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y que π contenga al punto origen de coordenadas.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 2x \, dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 03
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 03

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado un número $a \neq 0$, determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & -a \\ a^2 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$ posee inversa en función del valor de a .

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la recta r_1 que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, 0)$, y la recta r_2 que pasa por los puntos $C = (-1, 0, 1)$ y $D = (0, 3, 0)$. Se pide estudiar si estas rectas definen un plano.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x}}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{9}{16 + 25x^2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie el rango de la matriz A en función del número real α y el número entero n .

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & n & \alpha \\ n & \alpha & n+1 \\ \alpha & n+1 & \alpha \end{pmatrix}$$

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si existe algún punto común a las rectas r_1 y r_2 . En caso de no existir, determine la distancia entre ambas rectas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \begin{cases} 2x + 2y - z - 3 = 0 \\ x - 3y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{-x^2 + x}$.

8 Calcule $\int x^2 \sin 2x \, dx$.

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 04
Hoja: 1 de 1				

Matemáticas II: 04

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la matriz A , estudie la existencia de una matriz X tal que $X \times A = I$. Calcúlela en el caso de que exista y sea única.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación: $X \times A$ representa el producto de matrices.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie y determine, en caso de existir, el plano que contiene a los puntos $A = (1, 2, 1)$ y $B = (7, 0, 0)$, y que es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie el crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x$ y el intervalo $[-2, 1]$ del eje OX .

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la ecuación matricial $A^2 + 2A = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Compruebe que A es inversible determinando la inversa de A en función de A .

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie el número de rectas que determinan los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv 3x + 5y - 4z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0, \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv -3x - 4y + 5z - 4 = 0.$$

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = e^x(x - 2)$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles extremos relativos, convexidad y posibles puntos de inflexión de la función f . Dibuje la gráfica de f .

8 Calcule $\int x^2 \sin 3x \, dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 05
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 05

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados dos números a y b , no nulos, estudie si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene matriz inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine el punto Q que es el simétrico del punto $P = (2, 1, -3)$ respecto al plano que determinan los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$.

Observación El punto Q es la imagen especular del punto P supuesto que el plano fuera un espejo.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int (e^x + 2)(e^{x+1} - 1)dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, estudie si existe la matriz inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Halle unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A = (3, 5, 1)$ y corta a las dos rectas: $r := \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y $s := \begin{cases} x - 1 = y - 1 = \frac{z - 1}{-2} \end{cases}$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 8x^2$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \cos^2(3x)dx$.

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 06
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 06

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la matriz A , estudie la existencia de una matriz X tal que $A \times X = I$, y calcúlela en el caso de que exista. Observación: $A \times X$ representa el producto de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen únicamente los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (-1, 2, 1)$ y $C = (-2, 0, 4)$. Se pide determinar el cuarto punto D y el área del triángulo CDA .

Observación: $ABCD$ es el paralelogramo que une A con B , B con C , C con D y D con A .

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine las ecuaciones de todas las rectas asíntotas de la función $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x) = x^4 - x$ y el intervalo $[-2, 1]$ del eje OX .

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine las potencias A^{3k} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde a, b y c son números no nulos, y k , es un número natural mayor que 1.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Halle a y b para que los tres planos $\pi_1 := x + 2y - z = 1$, $\pi_2 := 2x + y + az = 0$ y $\pi_3 := 3x + 3y - 2z = b$ contengan a una misma recta r . Determine unas ecuaciones paramétricas de r .

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

De la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, estudie el dominio, asíntotas, crecimiento y posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int x \cos x \, dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 07
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 07

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Discuta y resuelva, según los valores del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ y - z = -1 \\ ax - y + z = 1 \end{cases}$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la distancia del punto $A = (1, 1, 1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x - x^2}}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)^3 (x - 1) dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie el rango de la matriz A para todos los números reales α y los números enteros n .

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & n & \alpha \\ n & \alpha & n + 1 \\ \alpha & n + 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado el plano $\pi = x - y + z - 3 = 0$, determine todos los planos que contienen a los puntos $A = (-1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y forman un ángulo de 30° con el plano π .

Observación $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$; $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = e^x(x - 2)$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles extremos relativos, convexidad y posibles puntos de inflexión de la función f . Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \cos^2(3x) dx$.

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
			PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 08
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 08

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si existe alguna matriz X tal que $A \times X \times B = C$, y en caso afirmativo, calcúlela.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación: $A \times X$ representa el producto de matrices.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la recta: r_1 que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, 0)$, y la recta r_2 que pasa por los puntos $C = (-1, 0, 1)$ y $D = (0, 3, 0)$. ¿Qué plano definen estas dos rectas?

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine las ecuaciones de todas las rectas asíntotas de la función $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{9}{16 + 25x^2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Resuelva, dependiendo del valor de λ , el siguiente sistema $S_\lambda = \begin{cases} 2\lambda x + 2y + 3\lambda z = 1 \\ \lambda x - \lambda y - z = 2 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Se consideran las rectas: r_1 , que pasa por los puntos $A = (0, 1, -1)$ y $B = (1, 1, 0)$, y $r_2 \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$. Calcule la distancia entre ellas, en el caso de que sean paralelas o que se crucen.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3x - x^2}$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_1^e \ln x^2 dx$.

Observación: $\ln x$ representa el logaritmo neperiano de x .

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 09
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 09

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados dos números a y b distintos, determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & b \\ 4 & a^2 & b^2 \end{pmatrix}$ posee inversa en función de los valores de a y b .

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la distancia del punto $A = (1, 1, 1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Se considera la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

Observación: $\ln x$ designa el logaritmo neperiano de x .

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{6x^2 - 1}{8x^2 + 2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Hállese una matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A X A^{-1} = C$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

¿Qué relación debe existir entre los coeficientes de la ecuación general del plano

$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ para que dicho plano sea perpendicular a la recta

$r_2 = \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y contenga al punto origen?

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \ln(x + 1) dx$.

Observación: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de x .

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
			PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 10
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 10

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la matriz M , estudie la existencia de una matriz Y tal que $M \times Y = I$, y calcúlela

en el caso de que exista. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observación: $M \times Y$ representa el producto de matrices.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

¿Cuál es la mínima distancia entre el punto $A = (1, 1, 1)$ y un punto de la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases} ?$$

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y haga un dibujo aproximado de la gráfica de f .

Nota: $\ln x$ designa el logaritmo neperiano de x .

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{4}{25 + 16x^2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Resuelva, dependiendo del valor de λ , el siguiente sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 2\lambda x + 2y + 3\lambda z = 1 \\ \lambda x - \lambda y - z = 2 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la ecuación general de un plano que contiene al origen de coordenadas y es perpendicular a los planos que determinan la recta de ecuación general $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -1 \\ a - 2x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ b/x & \text{si } 1 < x \end{cases}$.

Estudie si existen valores de a y b para que f sea derivable en toda la recta real.

8 Calcule $\int x^2 \sin(2+x) dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 11
Hoja: 1 de 1				

Matemáticas II: 11

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie si existe alguna matriz X tal que $B \times X \times A = C$, y en caso afirmativo, calcúlela.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación: $A \times X$ representa el producto de matrices.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine el área del cuadrilátero $ADCB$ tal que $A = (1, 2, 1)$, $B = (4, 4, 1)$, $C = (6, 1, 1)$ y $D = (2, -1, 1)$.

Observación: Cuadrilátero: Figura plana de cuatro lados

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Estúdiala y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f .

Observación: $\ln x$ designa el logaritmo neperiano de x .

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule el área de la región del plano delimitada por las gráficas de las funciones siguientes: $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2 - 1$ definidas en el intervalo $[-1, 1]$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de λ la matriz A no tiene inversa?

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Se consideran las rectas: r_1 , que pasa por los puntos $A = (0, 1, -1)$ y $B = (1, 1, 0)$, y $r_2 \equiv \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$. Calcule la distancia entre ellas, en el caso de que sean paralelas o que se crucen.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$.

8 Calcule $\int x \cos x \, dx$.

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 12
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 12

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dado un número a , determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & -a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ posee inversa en función del valor de a .

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie, y determine en caso de existir, el plano que contiene a los puntos $A = (1, 2, 1)$ y $B = (7, 0, 0)$, y que es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int (x^3 + 2x^2 + x)^4 dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine las potencias A^{3k} de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde a , b y c son números no nulos, y k es un número natural mayor que 1.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie el número de rectas que determinan estos tres planos:

$$\pi_1 \equiv 3x + 5y - 4z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0, \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv -3x - 4y + 5z - 4 = 0.$$

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3x - x^2}$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_1^e \ln x^2 dx$.

Observación: $\ln x$ representa el logaritmo neperiano de x .

 03100564		Matemáticas II (F.E.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
		Junio - 2015	Duración: 90min.	MODELO 13
Hoja: 1 de 1				

Matemáticas II: 13

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Determine el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+3 & a+5 & a+7 \\ a+6 & a+9 & a+12 \end{vmatrix}$.

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Dados la recta $r := \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y el plano $\pi := 2x - y + z - 1 = 0$, halle las ecuaciones paramétricas de la recta s , proyección ortogonal de r sobre π .

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int_{-1}^1 (x^2 + 1)^3 (x - 1) dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la ecuación matricial $2A + A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Compruebe que A es inversible determinando la inversa de A en función de A .

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la recta s que está contenida en los planos π_1 y π_2 , donde π_1 es el plano que contiene al origen y es perpendicular a la recta $r = \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$, y π_2 es el plano que pasa por el origen y es paralelo al plano $\pi \equiv 3x + 2y + 3z - 2 = 0$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Estudie y dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 8x^2$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \cos^2(3x) dx$.

 03100305		Matemáticas II (F.G.)		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 14
				Hoja: 1 de 1

Matemáticas II: 14

Atención: Conteste a los problemas de una única opción. Puede utilizar una calculadora científica sin prestaciones gráficas ni de programación.

Opción A

1 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Discuta y resuelva, según los valores del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ y - z = -1 \\ ax - y + z = 1 \end{cases}$$

2 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

De un paralelogramo $ACDB$ se conocen únicamente los puntos $A = (3, 1, 0)$, $B = (-1, 2, 1)$ y $C = (-2, 0, 4)$. Se pide determinar el cuarto punto D y el área del triángulo CDA .

Observación: $ABCD$ es el paralelogramo que une A con B , B con C , C con D y D con A .

3 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine las ecuaciones de todas las rectas asíntotas de la función $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

4 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 5}{-x^3 + 2x^2 + x - 2} dx$.

Opción B

5 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Resuelva, dependiendo del valor de λ , el siguiente sistema $S_\lambda \equiv \begin{cases} 2\lambda x + 2y + 3\lambda z = 1 \\ \lambda x - \lambda y - z = 2 \\ x - y - z = \lambda \end{cases}$.

6 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Determine la recta s que está contenida en los planos π_1 y π_2 , donde π_1 es el plano que contiene al origen y es perpendicular a la recta $r = \begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0 \\ x - 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$, y π_2 es el plano que pasa por el origen y es paralelo al plano $\pi = 3x + 2y + 3z - 2 = 0$.

7 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Represente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$.

8 Ejercicio (valor 2.5 puntos)

Calcule $\int x^2 \operatorname{tg}^2(x^3) dx$.

Observación: $\operatorname{tg} x$ es la tangente de x .

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 01
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

- (3 puntos) Para la desinfección de una piscina es necesario un máximo de 2'4 litros de un producto A y un mínimo de 2'5 litros de otro producto B. En el mercado se comercializan dos preparados M y N al precio de 10 y 30 euros el litro, respectivamente. En la composición de M hay un 10% de A y un 50% de B en la de N hay un 40% de A y un 10% de B. ¿Cuántos litros de M y N necesitamos para desinfectar la piscina con el mínimo coste?
- (2 puntos) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + 6$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Escriba la ecuación de la recta tangente en dicho punto.
- (2 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones y de su expresión simplificada:
 - $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
 - $f(x) = \ln \sqrt[5]{x^4 + x^2}$
- (3 puntos) El peso medio de los deportistas de un club deportivo se distribuye según una $N(110, 15)$. Nos proponemos extraer una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$.
 - ¿Cuál será la distribución de las medias muestrales que pueden extraerse?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra de 25 deportistas de una muestra sea superior a 115?
 - Determine un intervalo de característico para las medias muestrales correspondientes a una probabilidad $1 - \alpha = 0'95$.

OPCIÓN B

- (3 puntos) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 11 \\ x + 2y - 2z = 7 \\ -3x - y + 2z = -13 \end{cases}$$

Resuelva usando el método de Gauss o algún método matricial.

- (3 puntos) Determine los valores de b , c y d para que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en el punto de abscisa $x = -14$, un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$ y para que tome valor 1 en $x = 1$.

- (2 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} \quad P(B^c) = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Halle $P(B)$, $P(A)$ y $P(A^c \cap B)$.

- (2 puntos) En un hipermercado hay veinte cajeros y diez cajeras. La mitad de las cajeras y la mitad de los cajeros van a trabajar en coche. Calcule la probabilidad de que, al elegir un trabajador al azar, resulte ser:
 - Cajera o que va en coche.
 - Sabiendo que es cajero, ¿cuál es la probabilidad de que vaya en coche?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 02
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada y justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

- (2 puntos) Una fábrica de chocolate emplea, para una determinada marca, leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche el doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de los ingredientes por kilo son: leche, 0'80 euros; cacao, 4 euros; y almendras, 10 euros. En un día se fabrican 9000 kg de chocolate de dicha marca con un coste total de 22800 euros. ¿Cuántos kilos se utilizan de cada componente? Resolver usando el método de Gauss o algún otro método matricial.

- (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcular $(AB)^T$ y $(AB)^{-1}$.

- (3 puntos) Determinar los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x \leq 1 \\ x + b & \text{si } 1 < x < 4 \\ \frac{2x + 4}{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- (3 puntos) Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que $P(A) = 0'4$, $P(B) = 0'3$ y $P(A \cap B) = 0'1$. Calcula razonadamente:

$$P(A \cup B), P(A^c \cap B^c), P(A/B) \text{ y } P(A^c \cap B).$$

OPCIÓN B

- (3 puntos) Dado el problema de programación lineal:

$$\text{Optimizar } Z = 20x - 15y$$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + 3y \leq 2 \\ 2x - y \leq 6 \\ 3x - y \leq 3 \\ x \leq 6 \\ x - y \geq 3 \end{cases}$$

- Represente la región factible.
- Determine los posibles extremos.
- ¿En qué punto se alcanza el mínimo? ¿Cuál es el valor mínimo alcanzado?

- (2 puntos) Estudie la continuidad de la siguiente función y obtenga sus asíntotas:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 25}$$

- (2 puntos) Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}} \right) dx$

b) $\int x\sqrt{x^2 - 9} dx$

- (3 puntos) En una fábrica de bombillas, se ha comprobado que el 4% de ellas son defectuosas. Un cliente va a comprar un paquete de 500 bombillas. Determinar:

- El número esperado de bombillas no defectuosas en un paquete de 500.
- La distribución de la proporción de bombillas defectuosas en las cajas de 500 bombillas.
- La probabilidad de que el número de bombillas defectuosas (en un paquete de 500 bombillas) esté entre 20 y 30.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2015	Duración: 90min.	MODELO 03
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma razonada y justificando sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

- (3 puntos) Una compañía aérea con fines recreativos, organiza viajes en avioneta y en helicópteros. Para ello dispone de una flota de 4 helicópteros y 6 avionetas. El número de excursiones está condicionado a un mínimo de 3 permisos para ver elefantes y un máximo 8 para las ballenas. Los precios de las excursiones son de 200 euros por persona en el caso de los helicópteros y de 300 euros por persona en el caso de las avionetas. Escriba TODAS las restricciones que debe cumplir el problema. Si la empresa quiere obtener un ingreso máximo por la actividad, ¿cuántas excursiones de cada tipo tiene que organizar?
- (3 puntos) Estudie la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1/x & \text{si } 1 < x < \infty \end{cases}$$
- (2 puntos) En un hipermercado hay veinte cajeros y diez cajeras. La mitad de las cajeras y la mitad de los cajeros van a trabajar en coche. Calcule la probabilidad de que, al elegir un trabajador al azar, resulte ser:
 - Cajera o que va en coche.
 - Sabiendo que es cajero, ¿cuál es la probabilidad de que vaya en coche?
- (2 puntos) En una muestra aleatoria de tamaño 1.000 llevada a cabo en los institutos de una determinada comunidad, el coeficiente intelectual medio de los entrevistados resultó ser de 105, con una desviación típica de 7. Construya un intervalo de confianza al 99% para el coeficiente intelectual de los estudiantes.

OPCIÓN B

- (3 puntos) Para la desinfección de una piscina es necesario un máximo de 2'4 litros de un producto A y un mínimo de 2'5 litros de otro producto B. En el mercado se comercializan dos preparados M y N al precio de 10 y 30 euros el litro, respectivamente. En la composición de M hay un 10% de A y un 50% de B en la de N hay un 40% de A y un 10% de B. ¿Cuántos litros de M y N necesitamos para desinfectar la piscina con el mínimo coste? Resuelva usando el método de Gauss o algún otro método matricial.
- (2 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:
 - $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$
 - $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$
- (2 puntos) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + 6$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Escriba la ecuación de la recta tangente en dicho punto.
- (3 puntos) El peso medio de los deportistas de un club deportivo se distribuye según una $N(110, 15)$. Nos proponemos extraer una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$.
 - ¿Cuál será la distribución de las medias muestrales que pueden extraerse?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra de 25 deportistas de una muestra sea superior a 115?
 - Determine un intervalo de característico para las medias muestrales correspondientes a una probabilidad $1 - \alpha = 0'95$.

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 04
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

- (2 puntos) Una fábrica de chocolate emplea, para una determinada marca, leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche el doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de los ingredientes por kilo son: leche, 0'80 euros; cacao, 4 euros; y almendras, 10 euros. En un día se fabrican 9000 kg de chocolate de dicha marca con un coste total de 22800 euros. ¿Cuántos kilos se utilizan de cada componente? Resuelva usando el método de Gauss o algún otro método matricial.

- (2 puntos) Halle todas las matrices que conmutan con:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (3 puntos) Halle el valor de a para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 2$ siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ ax + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- (3 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, \quad P(B^c) = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Halle $P(B)$, $P(A)$ y $P(A^c \cap B)$.

OPCIÓN B

- (3 puntos) Dado el problema de programación lineal:

$$\text{Optimizar } Z = 20x - 15y$$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + 3y \leq 2 \\ 2x - y \leq 6 \\ 3x - y \leq 3 \\ x \leq 6 \\ x - y \geq 3 \end{cases}$$

- Represente la región factible.
 - Determine los posibles extremos.
 - ¿En qué punto se alcanza el mínimo? ¿Cuál es el valor mínimo alcanzado?
- (3 puntos) Determine los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x \leq 1 \\ x + b & \text{si } 1 < x < 4 \\ \frac{2x + 4}{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- (2 puntos) La duración de los motores de una marca de neveras sigue una distribución normal con una media de 10.000 horas de duración y una desviación típica de 600 horas. Se toma al azar una muestra de 200 neveras y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que sea menor de 8.500? Nombre las variables aleatorias que aparecen en el problema e indique la distribución que siguen las mismas.

- (2 puntos) De dos sucesos A y B se sabe que:

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{3}$$

Halle $P(A \cup B)$, $P(A \cap B^c)$ y $P(A \cap B)$.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 05
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma razonada y justificando sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $AX = BX + C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Represente la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Determine aquellos puntos de la región factible en los cuales se alcanzarán los posibles extremos de una función cualquiera. Sabiendo que la función $Z = 2x + 3y$ representa el número de clientes que acude a visitar un centro comercial y el conjunto de ecuaciones anterior son las condiciones en las que se producen dichas visitas, determine, si es posible, el número máximo y mínimo de clientes que acuden al centro. Justifique la respuesta

3. (3 puntos) Tras el lanzamiento al mercado de un determinado producto se ha observado que durante los dos primeros años ha seguido la siguiente función, $f(t) = 3t^2 + 4$. Una vez finalizado el segundo año, se vuelve a analizar la evolución del mismo y se observa que en los cuatro años siguientes la función que seguía era $f(t) = -2t + 20$, siendo en ambos caso t el tiempo expresado en años. Exprese mediante una única función la evolución del precio durante los seis años que se ha estudiado.

Estudie cuando ha sido creciente y cuando decreciente el precio del artículo e indique cuando ha alcanzado el precio máximo y cuál ha sido dicho precio.

4. (3 puntos) En una casa hay tres llaveros, A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las cuales solo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero.
- ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?
 - ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?
 - Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

Justifique las respuestas y escríbalas en lenguaje matemático

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Para la desinfección de una piscina es necesario un máximo de 2'4 litros de un producto A y un mínimo de 2'5 litros de otro producto B. En el mercado se comercializan dos preparados M y N al precio de 10 y 30 euros el litro, respectivamente. En la composición de M hay un 10% de A y un 50% de B en la de N hay un 40% de A y un 10% de B. ¿Cuántos litros de M y N necesitamos para desinfectar la piscina con el mínimo coste? Resuelva usando el método de Gauss o algún método matricial.

2. (3 puntos) Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1/x & \text{si } 1 < x < \infty \end{cases}$$

3. (2 puntos) En un hipermercado hay veinte cajeros y diez cajeras. La mitad de las cajeras y la mitad de los cajeros van a trabajar en coche. Calcule la probabilidad de que, al elegir un trabajador al azar, resulte ser:

- Cajero que no va en coche.
- Sabiendo que es cajero, ¿cuál es la probabilidad de que vaya en coche?

4. (2 puntos) En una muestra aleatoria de tamaño 1.000 llevada a cabo en los institutos de una determinada comunidad, el coeficiente intelectual medio de los entrevistados resultó ser de 105, con una desviación típica de 7. Construya un intervalo de confianza al 99% para el coeficiente intelectual de los estudiantes

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2015	Duración: 90min.	MODELO 06
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Una fábrica de chocolate emplea, para una determinada marca, leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche el doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de los ingredientes por kilo son: leche, 0'80 euros; cacao, 4 euros; y almendras, 10 euros. En un día se fabrican 9000 kg de chocolate de dicha marca con un coste total de 22800 euros. ¿Cuántos kilos se utilizan de cada componente? Resuelva usando el método de Gauss o algún otro método matricial.

2. (2 puntos) Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}} \right) dx$

b) $\int x\sqrt{x^2 - 9} dx$

3. (2 puntos) Halle el valor de a para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 2$ siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ ax + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

4. (3 puntos) En una fábrica de bombillas, se ha comprobado que el 4% de ellas son defectuosas. Un cliente va a comprar un paquete de 500 bombillas. Determine:

- El número esperado de bombillas no defectuosas en un paquete de 500.
- La distribución de la proporción de bombillas defectuosas en las cajas de 500 bombillas.
- La probabilidad de que el número de bombillas defectuosas (en un paquete de 500 bombillas) esté entre 20 y 30.

OPCIÓN B

1. (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcule $(AB)^T$ y $(AB)^{-1}$.

2. (2 puntos) Halle todas las matrices que conmutan con

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (3 puntos) En un experimento se ha comprobado que la velocidad de cierta partícula, en metros por segundo, depende del tiempo durante el cual se aplique un producto A. Dicha velocidad viene dada por la función:

$$V(t) = \frac{50t^2 - 20t}{2t^2 - t}$$

Siendo t el tiempo de aplicación de A.

- Si se aplica A durante 20 segundos, ¿Qué velocidad llevará la partícula?
 - Si se supone que no se detiene la aplicación del producto A, ¿cree que la velocidad de la partícula seguirá creciendo de forma indefinida?
4. (3 puntos) Se lanza una moneda al aire 500 veces. Calcule la probabilidad de obtener un número de caras entre 235 y 265 ambas inclusive. Exponga dos formas distintas de resolver el problema y realice los cálculos en la forma más corta.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 07
				Hoja: 1 de 2



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc

Junio - 2015

Duración: 90min.

MODELO 07

Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma razonada y justificando sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

1. (3 puntos) Para la desinfección de una piscina es necesario un máximo de 2'4 litros de un producto A y un mínimo de 2'5 litros de otro producto B. En el mercado se comercializan dos preparados M y N al precio de 10 y 30 euros el litro, respectivamente. En la composición de M hay un 10% de A y un 50% de B en la de N hay un 40% de A y un 10% de B. ¿Cuántos litros de M y N necesitamos para desinfectar la piscina con el mínimo coste?
2. (3 puntos) Calcular las derivadas de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto $x = 1$:
 - a. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$
 - b. $f(x) = \ln \sqrt[8]{x^4 + x^2}$
3. (2 puntos) En un hipermercado hay veinte cajeros y diez cajeras. La mitad de las cajeras y la mitad de los cajeros van a trabajar en coche. Calcula la probabilidad de que, al elegir un trabajador al azar, resulte ser:
 - a) Sabiendo que es cajero, ¿cuál es la probabilidad de que vaya en coche?
 - b) Son independientes los sucesos cajero y va en coche?
4. (2 puntos) En una muestra aleatoria de tamaño 1.000 llevada a cabo en los institutos de una determinada comunidad, el coeficiente intelectual medio de los entrevistados resultó ser de 105, con una desviación típica de 7. Construya un intervalo de confianza al 99% para el coeficiente intelectual de los estudiantes

b. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x^4 + x^2}$

OPCIÓN B

1. (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $AX = BX + C$ siendo:

2. (2 puntos) Representar la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

Determinése aquellos puntos de la región factible en los cuales se alcanzarán los posibles extremos de una función cualquiera. Sabiendo que la función $Z = 2x + 3y$ representa el número de clientes que acude a visitar un centro comercial y el conjunto de ecuaciones anterior son las condiciones en las que se producen dichas visitas, determinése, si es posible, el número máximo y mínimo de clientes que acuden al centro. Justificar la respuesta.

Justificar las respuestas y escribirlas en lenguaje matemático usando expresiones del cálculo de probabilidades

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 09
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $AX = BX + C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Represente la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Determine aquellos puntos de la región factible en los cuales se alcanzarán los posibles extremos de una función cualquiera. Sabiendo que la función $Z = 2x + 3y$ representa el número de clientes que acude a visitar un centro comercial y el conjunto de ecuaciones anterior son las condiciones en las que se producen dichas visitas, determine, si es posible, el número máximo y mínimo de clientes que acuden al centro. Justifique la respuesta.

3. (3 puntos)) Tras el lanzamiento al mercado de un determinado producto se ha observado que durante los dos primeros años ha seguido la siguiente función, $f(t) = 3t^2 + 4$. Una vez finalizado el segundo año, se vuelve a analizar la evolución del mismo y se observa que en los cuatro años siguientes la función que seguía era $f(t) = -2t + 20$, siendo en ambos caso t el tiempo expresado en años. Expresé mediante una única función la evolución del precio durante los seis años que se ha observado. Estudie cuando ha sido creciente y cuando decreciente el precio del artículo e indique cuando ha alcanzado el precio máximo y cuál ha sido dicho precio.
4. (3 puntos) En una casa hay tres llaveros, A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las cuales solo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero.
- ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?
 - ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?
 - Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

Justificar las respuestas y escribirlas en lenguaje matemático usando expresiones del cálculo de probabilidades.

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Para la desinfección de una piscina es necesario un máximo de 2'4 litros de un producto A y un mínimo de 2'5 litros de otro producto B. En el mercado se comercializan dos preparados M y N al precio de 10 y 30 euros el litro, respectivamente. En la composición de M hay un 10% de A y un 50% de B en la de N hay un 40% de A y un 10% de B. ¿Cuántos litros de M y N necesitamos para desinfectar la piscina con el mínimo coste?
2. (2 puntos) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + 6$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante? Escriba la ecuación de la recta tangente en dicho punto.
3. (2 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones y de su expresión simplificada:
- $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}$
 - $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$
4. (3 puntos) El peso medio de los deportistas de un club deportivo se distribuye según una $N(110, 15)$. Nos proponemos extraer una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$. ¿Cuál será la distribución de las medias muestrales que pueden extraerse? ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra de 25 deportistas de una muestra sea superior a 115? Determine un intervalo de característico para las medias muestrales correspondientes a una probabilidad $1 - \alpha = 0'95$.

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 10
				Hoja: 1 de 2	

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

- (3 puntos) Una fábrica decide distribuir sus excedentes en tres productos alimenticios A, B y C a cuatro países de África P_1, P_2, P_3 y P_4 según se muestra en la matriz M (cantidades en toneladas). La fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas de transporte E_1 y E_2 , como indica la matriz T (en euros por tonelada).

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad T = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Efectúe el producto de ambas matrices y responda: ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto? ¿Qué elementos de esta matriz nos indican lo que nos cuesta transportar el producto C con la empresa E_2 ? Indique qué elementos de esa matriz le permiten decidir la empresa que resulta más barata.

- (3 puntos) Halle el valor de a para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 2$ siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ ax + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- (2 puntos) De dos sucesos A y B se sabe que $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{3}$. Halle $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ y $P(A \cap B^c)$.

- (2 puntos) La duración de los motores de una marca de neveras sigue una distribución normal con una media de 10.000 horas de duración y una desviación típica de 600 horas. Se toma al azar una muestra de 200 neveras y se calcula la media. ¿Cuál es la probabilidad de que sea menor de 8.500? Nombre las variables aleatorias que aparecen en el problema e indique la distribución que siguen las mismas.

OPCIÓN B

- (2 puntos) Represente la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Determine aquellos puntos de la región factible en los cuales se alcanzarán los posibles extremos de una función cualquiera. Sabiendo que la función $Z = 2x + 3y$ representa el número de clientes que acude a visitar un centro comercial y el conjunto de ecuaciones anterior son las condiciones en las que se producen dichas visitas, determine, si es posible, el número máximo y mínimo de clientes que acuden al centro. Justifique la respuesta.

- (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcule $(AB)^T$ y $(AB)^{-1}$.
- (3 puntos) Determine los valores de b , c y d para que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en el punto de abscisa $x = -14$, un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$ y para que tome valor 1 en $x = 1$.
- (3 puntos) En una fábrica de bombillas, se ha comprobado que el 4% de ellas son defectuosas. Un cliente va a comprar un paquete de 500 bombillas. Determine:
 - El número esperado de bombillas no defectuosas en un paquete de 500.
 - La distribución de la proporción de bombillas defectuosas en las cajas de 500 bombillas.
 - La probabilidad de que el número de bombillas defectuosas (en un paquete de 500 bombillas) esté entre 20 y 30.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 11
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma razonada y justificando sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 11 \\ x + 2y - 2z = 7 \\ -3x - y + 2z = -13 \end{cases}$$

Resuelva usando el método de Gauss o algún método matricial.

2. (2 puntos)) Tras el lanzamiento al mercado de un determinado producto se ha observado que durante los dos primeros años ha seguido la siguiente función, $f(t) = 3t^2 + 4$. Una vez finalizado el segundo año, se vuelve a analizar la evolución del mismo y se observa que en los cuatro años siguientes la función que seguía era $f(t) = -2t + 20$, siendo en ambos caso t el tiempo expresado en años. Exprese mediante una única función la evolución del precio durante los seis años que se ha observado. Estudie cuando ha sido creciente y cuando decreciente el precio del artículo.
3. (2 puntos) Calcule las siguientes integrales:
- a. $\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2} \right) dx$ b. $\int_1^3 \frac{x^2 + x + 2}{x} dx$
4. (3 puntos) En una casa hay tres llaveros, A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las cuales solo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero.
- a. ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?
- b. ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?
- c. Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

Justifique las respuestas y escribirlas en lenguaje matemático usando expresiones del cálculo de probabilidades.

OPCIÓN B

1. (2 puntos) Resuelva la ecuación matricial $AX = BX + C$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Represente la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Determine aquellos puntos de la región factible en los cuales se alcanzarán los posibles extremos de una función cualquiera. Sabiendo que la función $Z = 2x + 3y$ representa el número de clientes que acude a visitar un centro comercial y el conjunto de ecuaciones anterior son las condiciones en las que se producen dichas visitas, determine, si es posible, el número máximo y mínimo de clientes que acuden al centro. Justifique la respuesta.

3. (3 puntos) Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -1/x & \text{si } 1 < x < \infty \end{cases}$$

4. (3 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, P(B^c) = \frac{2}{3} \text{ y } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Halla $P(B)$, $P(A)$ y $P(A^c \cap B)$.

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 12
				Hoja: 1 de 2	

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Una fábrica decide distribuir sus excedentes en tres productos alimenticios A, B y C a cuatro países de África P_1 , P_2 , P_3 y P_4 según se muestra en la matriz M (cantidades en toneladas). La fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas de transporte E_1 y E_2 , como indica la matriz T (en euros por tonelada).

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad T = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Efectúe el producto de ambas matrices y responda: ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto? ¿Qué elementos de esta matriz nos indican lo que nos cuesta transportar el producto C con la empresa E_2 ? Indica qué elementos de esa matriz te permiten decidir la empresa que resulta más barata.

2. (3 puntos) Determine los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x \leq 1 \\ x + b & \text{si } 1 < x < 4 \\ \frac{2x + 4}{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

3. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que $P(A) = 0'4$, $P(B) = 0'3$ y $P(A \cap B) = 0'1$. Calcule razonadamente:

$$P(A \cup B), P(A^c \cap B^c), P(A/B) \text{ y } P(A^c \cap B).$$

4. (2 puntos) Se lanza una moneda al aire 500 veces. Calcule la probabilidad de obtener un número de caras entre 235 y 265 ambas inclusive. Exponga dos formas distintas de resolver el problema y realice los cálculos en la forma más corta.

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Dado el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Optimizar } Z = 20x - 15y \\ &\text{con las restricciones } \begin{cases} x + 3y \leq 2 \\ 2x - y \leq 6 \\ 3x - y \leq 3 \\ x \leq 6 \\ x - y \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

- a. Represente la región factible. Determine los posibles extremos
b. ¿En qué punto se alcanza el máximo? ¿Cuál es el valor máximo alcanzado?

2. (2 puntos) Estudie la continuidad de la siguiente función y calcule sus asíntotas:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 25}$$

3. (2 puntos) Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}} \right) dx$

b) $\int x\sqrt{x^2 - 9} dx$

4. (3 puntos) En una fábrica de bombillas, se ha comprobado que el 4% de ellas son defectuosas. Un cliente va a comprar un paquete de 500 bombillas. Determine:

- a) El número esperado de bombillas no defectuosas en un paquete de 500.
b) La distribución de la proporción de bombillas defectuosas en las cajas de 500 bombillas.
c) La probabilidad de que el número de bombillas defectuosas (en un paquete de 500 bombillas) esté entre 20 y 30.

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2015	Duración: 90min.		MODELO 13
				Hoja: 1 de 2	

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $(AB)^T$ y $(AB)^{-1}$.

2. (2 puntos) Halle todas las matrices que conmutan con

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (3 puntos) Estudie la continuidad de la siguiente función y calcule sus asíntotas:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 25}$$

4. (3 puntos) En una fábrica de bombillas, se ha comprobado que el 4% de ellas son defectuosas. Un cliente va a comprar un paquete de 500 bombillas. Determine:
- El número esperado de bombillas no defectuosas en un paquete de 500.
 - La distribución de la proporción de bombillas defectuosas en las cajas de 500 bombillas.
 - La probabilidad de que el número de bombillas defectuosas (en un paquete de 500 bombillas) esté entre 20 y 30.

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Una fábrica decide distribuir sus excedentes en tres productos alimenticios A, B y C a cuatro países de África P_1 , P_2 , P_3 y P_4 según se muestra en la matriz M (cantidades en toneladas). La fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas de transporte E_1 y E_2 , como indica la matriz T (en euros por tonelada).

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad T = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Efectúe el producto de ambas matrices y responda: ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto? ¿Qué elementos de esta matriz nos indican lo que nos cuesta transportar el producto C con la empresa E_2 ? Indique qué elementos de esa matriz le permiten decidir la empresa que resulta más barata.

2. (2 puntos) Determine los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si } x \leq 1 \\ x + b & \text{si } 1 < x < 4 \\ \frac{2x + 4}{x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

3. (2 puntos) Calcule las siguientes integrales

a) $\int \left(\frac{x-2}{\sqrt{x}} \right) dx$

b) $\int x\sqrt{x^2 - 9} dx$

4. (3 puntos) Se lanza una moneda al aire 500 veces. Calcule la probabilidad de obtener un número de caras entre 235 y 265 ambas inclusive. Exponga dos formas distintas de resolver el problema y realice los cálculos en la forma más corta.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2015	Duración: 90min.	MODELO 14
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma razonada y justificando sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Resuélvase el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 11 \\ x + 2y - 2z = 7 \\ -3x - y + 2z = -13 \end{cases}$$

Utilice el método de Gauss o algún método matricial.

2. (2 puntos) Calcular las derivadas de las siguientes funciones y de su expresión simplificada:

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

b. $f(x) = \ln \sqrt[4]{x^4 + x^2}$

3. (2 puntos) Calcular las siguientes integrales.

a. $\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2} \right) dx$

b. $\int_1^3 \frac{x^2+x+2}{x} dx$

4. (3 puntos) El peso medio de los deportistas de un club deportivo se distribuye según una $N(110, 15)$. Nos proponemos extraer una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$.
- ¿Cuál será la distribución de las medias muestrales que pueden extraerse?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra de 25 deportistas de una muestra sea superior a 115?
 - Determine un intervalo de característico para las medias muestrales correspondientes a una probabilidad de $1 - \alpha = 0.95$.

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Para la desinfección de una piscina es necesario un mínimo de 24 litros de un producto A y un mínimo de 25 litros de otro producto B. En el mercado se comercializan dos preparados M y N al precio de 10 y 30 euros el litro, respectivamente:

En la composición de M hay un 10% de A y un 5% de B en la de N hay un 40% de A y un 10% de B. ¿Cuántos litros de M y N necesitamos para desinfectar la piscina con el mínimo coste?

2. (3 puntos) Determine los valores de b , c y d para que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en el punto de abscisa $x = -14$, un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$ y para que tome valor 1 en $x = 1$.

3. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, \quad P(B^c) = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Halle $P(B)$, $P(A)$ y $P(A^c \cap B)$

4. (2 puntos) En un hipermercado hay veinte cajeros y diez cajeras. La mitad de las cajeras y la mitad de los cajeros van a trabajar en coche. Calcule la probabilidad de que, al elegir un trabajador al azar, resulte ser:
- Cajera o que va en coche.
 - Sabiendo que es cajero, ¿cuál es la probabilidad de que vaya en coche?

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
Septiembre - 2015	Duración: 90min.		MODELO 15
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
 b) Discuta si existe solución del sistema $A \cdot B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y en caso afirmativo halle la solución por Gaus o algún método matricial.
2. (3 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$$

- a) Calcule los máximos y mínimos de $f(x)$.
 b) Estudie el crecimiento y decrecimiento en el intervalo $(0,5)$.
3. (2 puntos) Para determinar si existen diferencias significativas entre dos grupos de estudiantes, se realiza el mismo examen a 30 estudiantes del primer grupo y a 35 del segundo, obteniéndose los siguientes datos:

	Nota media	Desviación típica
Grupo 1	5'5	0'5
Grupo 2	5'2	1

Determine, con un nivel de significación del 1%, si existe una diferencia significativa entre ambos grupos.

4. (2 puntos) Una perfumería tiene tres estantes con la siguiente composición: en el estante superior hay 3 perfumes de mujer y 7 de caballero, en el estante central hay ocho perfumes de mujer y seis de caballero, y en el inferior hay cinco de mujer y ocho de caballero. Se escoge un estante al azar y se saca de él un perfume. Si el resultado es un perfume de mujer, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central? De nombres a los distintos sucesos y razone la resolución del problema.

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Tres amigos, Irene, Elena y Alejandro, decidieron hacer un regalo a su amigo Pedro que abandonaba el colegio ese año. El regalo vale 24'8 euros. Reúnen esta cantidad de forma que Alejandro aporta una tercera parte de lo que aporten las otras dos juntas y Elena aporte 3 céntimos de euro por cada 2 que aporte Irene. ¿Qué cantidad aporta cada uno de los amigos? Resuelva por Gauss o algún método matricial.

2. (2 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones y de su expresión simplificada:

a) $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{\sqrt{x}+1}$ b) $f(x) = \ln[(x-1) \cdot (x+1)] \cdot (x^2+1)$

3. (2 puntos) Calcule las siguientes integrales:

a. $\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2} \right) dx$ b. $\int_1^3 \frac{x^2+x+2}{x} dx$

4. (3 puntos) Queremos determinar el porcentaje de estudiantes que necesitan gafas. De un estudio anterior sabemos que el 65% de ellos usaban gafas.
- a. ¿Qué tamaño de muestra debemos coger para cometer un error máximo del 5% con un nivel de riesgo del 5%?
- b. Si no tenemos información previa, ¿qué tamaño de muestra debemos tomar?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Septiembre - 2015	Duración: 90min.	MODELO 16
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
b) Discuta si existe solución del sistema $A \cdot B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y en caso afirmativo halle la solución por Gaus o algún método matricial.
2. (2 puntos) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 7.$$

3. (2 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$$

- a) Determine el dominio.
b) Determine las asíntotas.
4. (3 puntos) Se lanza una moneda al aire 500 veces. Calcule la probabilidad de obtener un número de caras entre 235 y 265 ambas inclusive. Exponga dos formas distintas de resolver el problema y realice los cálculos en la forma más corta.

OPCIÓN B

1. (2 puntos) Represente la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Determine aquellos puntos de la región factible en los cuales se alcanzarán los posibles extremos de una función cualquiera. Sabiendo que la función $Z = 2x + 3y$ representa el número de clientes que acude a visitar un centro comercial y el conjunto de ecuaciones anterior son las condiciones en las que se producen dichas visitas, determine, si es posible, el número máximo y mínimo de clientes que acuden al centro. Justifique la respuesta.

2. (2 puntos) Halle todas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

que satisfacen la ecuación matricial: $X^2 = 2X$.

3. (3 puntos) Una empresa de compra y venta de viviendas ha realizado un estudio sobre los beneficios/pérdidas, en miles de euros a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a la función

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \text{ siendo } 0 \leq t \leq 10.$$

Se pide, justificando las respuestas:

- a) ¿En qué años se obtienen los beneficios máximo y mínimo?
b) Determine sus periodos de crecimiento y decrecimiento
c) ¿Qué resultados obtuvo la empresa en el último año del estudio
4. (3 puntos) Un nutricionista afirma que el 40% de los niños de 10 años presentan indicios de obesidad infantil. Tomada una muestra de 100 niños, se observó que 36 presentaban indicios de obesidad. Contraste la hipótesis del nutricionista para un nivel de confianza del 90%.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Septiembre - 2015	Duración: 90min.	MODELO 17
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma razonada y justificando sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Tres amigos, Irene, Elena y Alejandro, decidieron hacer un regalo a su amigo Pedro que abandonaba el colegio ese año. El regalo vale 24'8 euros. Reúnen esta cantidad de forma que Alejandro aporta una tercera parte de lo que aporten las otras dos juntas y Elena aporte 3 céntimos de euro por cada 2 que aporte Irene. ¿Qué cantidad aporta cada uno de los amigos? Resuelva usando el método de Gauss o algún método matricial.

2. (2 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$$

- a) Determine el dominio.
b) Determine las asíntotas.

3. (2 puntos) Calcule las siguientes integrales:

a. $\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2} \right) dx$

b. $\int_1^3 \frac{x^2 + x + 2}{x} dx$

4. (3 puntos) Queremos determinar el porcentaje de estudiantes que necesitan gafas. De un estudio anterior sabemos que el 65% de ellos usaban gafas.
a. ¿Qué tamaño de muestra debemos coger para cometer un error máximo del 5% con un nivel de riesgo del 5%?
b. Si no tenemos información previa, ¿qué tamaño de muestra debemos tomar?

OPCIÓN B

1. (2 puntos) Halle todas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

que satisfacen la ecuación matricial: $X^2 = 2X$

2. (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz X que verifica la ecuación: $A \cdot X \cdot B = 3C$.

3. (3 puntos) Halle el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$.
4. (3 puntos) En una casa hay tres llaveros, A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las cuales solo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero.
a. ¿Cuál será la probabilidad de que no se acierte con la llave?
b. ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave abra?
c. Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al segundo llavero B?
- Justificar las respuestas y escribirlas en lenguaje matemático usando expresiones del cálculo de probabilidades.

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Septiembre - 2015	Duración: 90min.	MODELO 18
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (2 puntos) Represente la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Determine aquellos puntos de la región factible en los cuales se alcanzarán los posibles extremos de una función cualquiera. Sabiendo que la función $Z = 2x + 3y$ representa el número de clientes que acude a visitar un centro comercial y el conjunto de ecuaciones anterior son las condiciones en las que se producen dichas visitas, determine, si es posible, el número máximo y mínimo de clientes que acuden al centro. Justifique la respuesta.

2. (2 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calcule la matriz X que verifica la ecuación: $A \cdot X \cdot B = 3C$.

3. (3 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$$

- a) Calcule los máximos y mínimos de $f(x)$.
b) Estudie el crecimiento y decrecimiento en el intervalo $(0,5)$.
4. (3 puntos) Un nutricionista afirma que el 40% de los niños de 10 años presentan indicios de obesidad infantil. Tomada una muestra de 100 niños, se observó que 36 presentaban indicios de obesidad. Contraste la hipótesis del nutricionista para un nivel de confianza del 90%.

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
b) Discuta si existe solución del sistema $A \cdot B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y en caso afirmativo halle la solución por Gaus o algún método matricial.
2. (3 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$$

- a) Determine el dominio.
b) Determine las asíntotas
3. (2 puntos) Los participantes en una prueba de orientación extrema disponen de dos mapas para consultar durante la misma. La probabilidad de que la senda a seguir sea la correcta es del 92% en cada mapa. Un participante llegará a la meta si conserva al menos uno de los mapas. Calcule la probabilidad de que el corredor aventurero llegue a meta.
4. (2 puntos) En un telar se producen lienzos en tres máquinas tejedoras. La máquina A produce 200 lienzos al día con un 4% de defectuosas. La máquina B produce 300 con un 5% de defectuosas y la C produce 400 con un 2% de defectuosas. Al final del día, se coge un lienzo al azar.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
b) Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A?

 03100311	 Septiembre - 2015	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
		Duración: 90min.	MODELO 19
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (2 puntos) Halle todas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Que satisfacen la ecuación matricial: $X^2 = 2X$.

2. (2 puntos) Dada la ecuación matricial $A \cdot X - A = I - A \cdot X$

a. Despeje la matriz X en la ecuación anterior.

b. Halle la matriz X sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (3 puntos) Halle el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$.
4. (3 puntos) Queremos determinar el porcentaje de estudiantes que necesitan gafas. De un estudio anterior sabemos que el 65% de ellos usaban gafas.
- a. ¿Qué tamaño de muestra debemos coger para cometer un error máximo del 5% con un nivel de riesgo del 5%?
- b. Si no tenemos información previa, ¿qué tamaño de muestra debemos tomar?

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Tres amigos, Irene, Elena y Alejandro, decidieron hacer un regalo a su amigo Pedro que abandonaba el colegio ese año. El regalo vale 24,8 euros.

Reúnen esta cantidad de forma que Alejandro aporta una tercera parte de lo que aporten las otras dos juntas y Elena aporte 3 céntimos de euro por cada 2 que aporte Irene. ¿Qué cantidad aporta cada uno de los amigos? Resuelva usando el método de Gauss o algún método matricial.

2. (3 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$$

- a) Calcule los máximos y mínimos de $f(x)$.
- b) Estudie el crecimiento y decrecimiento en el intervalo $(0,5)$.
3. (2 puntos) Para determinar si existen diferencias significativas entre dos grupos de estudiantes, se realiza el mismo examen a 30 estudiantes del primer grupo y a 35 del segundo, obteniéndose los siguientes datos:

	Nota media	Desviación típica
Grupo 1	5,5	0,5
Grupo 2	5,2	1

Determine, con un nivel de significación del 1%, si existe una diferencia significativa entre ambos grupos.

4. (2 puntos) Una perfumería tiene tres estantes con la siguiente composición: en el estante superior hay 3 perfumes de mujer y 7 de caballero, en el estante central hay ocho perfumes de mujer y seis de caballero, y en el inferior hay cinco de mujer y ocho de caballero.

Se escoge un estante al azar y se saca de él un perfume. Si el resultado es un perfume de mujer, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

De nombres a los distintos sucesos y razone la resolución del problema.

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
Septiembre - 2015	Duración: 90min.		MODELO 20
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y contestar a las preguntas de forma **razonada** y **justificando** sus respuestas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$ y discuta si existe solución del sistema $A \cdot B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y en caso afirmativo halle la solución por Gaus o algún método matricial.
2. (3 puntos) Una empresa de compra y venta de viviendas ha realizado un estudio sobre los beneficios/pérdidas, en miles de euros a lo largo de los últimos 10 años y ha comprobado que se ajustan a la función $F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ siendo $0 \leq t \leq 10$.
Se pide, justificando las respuestas:
- ¿En qué años se obtienen los beneficios máximo y mínimo?
 - Determinar sus periodos de crecimiento y decrecimiento
 - ¿Qué resultados obtuvo la empresa en el último año del estudio?
3. (2 puntos) Los participantes en una prueba de orientación extrema disponen de dos mapas para consultar durante la misma. La probabilidad de que la senda a seguir sea la correcta es del 92% en cada mapa. Un participante llegará a la meta si conserva al menos uno de los mapas. Calcule la probabilidad de que el corredor aventurero llegue a meta.
4. (2 puntos) En un telar se producen lienzos en tres máquinas tejedoras. La máquina A produce 200 lienzos al día con un 4% de defectuosas. La máquina B produce 300 con un 5% de defectuosas y la C produce 400 con un 2% de defectuosas. Al final del día, se coge un lienzo al azar.
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
 - Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A?

OPCIÓN B

1. (3 puntos) Represente la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Determine aquellos puntos de la región factible en los cuales se alcanzarán los posibles extremos de una función cualquiera. Sabiendo que la función $Z = 2x + 3y$ representa el número de clientes que acude a visitar un centro comercial y el conjunto de ecuaciones anterior son las condiciones en las que se producen dichas visitas, determine, si es posible, el número máximo y mínimo de clientes que acuden al centro. Justifique la respuesta.

2. (2 puntos) Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 24}{x + 1}$$

Determine el dominio y las asíntotas.

3. (2 puntos) Halle el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje OX y la recta $x = 1$.
4. (3 puntos) Un nutricionista afirma que el 40% de los niños de 10 años presentan indicios de obesidad infantil. Tomada una muestra de 100 niños, se observó que 36 presentaban indicios de obesidad. Contraste la hipótesis del nutricionista para un nivel de confianza del 90%.

Criterios Específicos de corrección de la asignatura

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

Curso 2013/2014

El examen consta de dos opciones, de las cuales el alumno debe contestar sólo una. Si en el examen aparecen ejercicios de las dos opciones, sólo se tendrán en cuenta las de aquella que tenga mayoría de preguntas resueltas.

1. La puntuación específica de cada pregunta está indicada en el enunciado de las mismas. Esta se distribuirá de forma proporcional entre el planteamiento y el desarrollo del mismo.
2. Para considerar correcta la solución el estudiante debe explicar o justificar la conclusión a la que llega. No se asignará la calificación total a una pregunta en la que sólo figura el resultado final sin referencia a la justificación correspondiente.
3. En todos los ejercicios deben aparecer indicadas las operaciones que se están realizando, no solo el valor final de las mismas.
4. En los ejercicios con un único apartado la calificación asignada al mismo se repartirá entre el planteamiento y el desarrollo del mismo.
5. En los ejercicios con dos apartados similares (por ejemplo dos integrales, dos límites, etc.)
 - a. La calificación de cada uno de ellos podrá puntuarse como máximo con la mitad de la nota total asignada a la pregunta.
 - b. En cada apartado se valorará el planteamiento, elección del método adecuado de cálculo y la resolución del ejercicio.
6. En los ejercicios que aparecen varias preguntas referidas a un mismo enunciado, se distribuirá en partes la puntuación asignada a la pregunta. Se podrá llevar a cabo un redondeo para evitar problemas con los decimales.

En cada ejercicio se valorará:

- Referencia a los contenidos teóricos que se están utilizando.
- Planteamiento del ejercicio.
- Utilización de las propiedades y conceptos referidos al tema objeto de la pregunta.

En todo momento se tendrán en cuenta los criterios generales de corrección, específicamente la capacidad expresiva y la corrección idiomática de los estudiantes, respetando:

- a) La corrección sintáctica
- b) La corrección ortográfica
- c) La puntuación apropiada y
- d) La adecuada presentación.

La deducción efectuada en la nota global en relación con los criterios señalados podrá ser hasta un máximo de dos puntos.

Además se valorará:

- 1. La correcta expresión matemática de los ejercicios.
- 2. El grado de finalización de los mismos (simplificación de las soluciones).
- 3. Explicación de los pasos dados en el desarrollo de los ejercicios.
- 4. Interpretación de los resultados obtenidos.
- 5. Coherencia entre la solución obtenida y el planteamiento y desarrollo del ejercicio.
- 6. La adecuación de los métodos de resolución a los contenidos de la materia.
- 7. La originalidad del planteamiento.
- 8. El uso o planteamiento de más de un método de resolución de los ejercicios.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 01
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

- 1 – (3 puntos) Dado el problema de programación lineal: minimizar $z = 3x + 5y$
con las restricciones
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$
 Se pide:

- Represente la región factible.
- ¿Hay condiciones redundantes? En caso afirmativo identifíquelas y en cualquier caso dé una explicación razonada a su respuesta.
- ¿En qué punto se alcanza el mínimo y cuánto vale?

- 2 – (2 puntos) Determinar el valor de k para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 1] \\ k/x & \text{si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

- 3 – (2 puntos) Calcule las siguientes integrales

a) $\int_0^{\pi/6} \sin(6x) dx$ b) $\int_2^4 \frac{x^2}{x^3-1} dx$

- 4 – (3 puntos) En una granja avícola el peso de los pollos se distribuye según una normal de media 1500gr. y una desviación típica de 250gr.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un pollo elegido al azar, pese más de 1950grs?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 64 pollos esté entre 1400 y 1800gr?

OPCIÓN B

- 1 – (3 puntos) Una empresa de hardware puede ofertar dos lotes de equipamiento tecnológico a despachos profesionales. El primero incluye 3 ordenadores portátiles y 2 tablets, y el segundo incluye 2 ordenadores portátiles y 4 tablets. La primera promoción genera un beneficio de 200€ y la segunda 250€. Si la empresa tiene un stock de 120 portátiles y 200 tablets ¿Cuántos lotes de cada tipo de promoción debe ofertar la empresa para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el máximo beneficio alcanzado?

- 2 – (3 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{3x}{x-3}$

- Razone cuál es el dominio de definición de $f(x)$.
- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

- 3 – (2 puntos) Tres paracaidistas deportivos realizan tres saltos simultáneos sobre un portaviones, siendo la probabilidad de caer sobre el objetivo de 0'2, 0'3 y 0'4 respectivamente. Calcular las probabilidades de que en cada vuelo se alcancen los objetivos.(considerar todos los posibles casos. 0, 1, 2 o 3 paracaidistas alcancen el objetivo)

- 4 – (2 puntos) El 80% de los estudiantes universitarios está en contra de la nueva política de becas Erasmus. Si tomamos una muestra de 90 estudiantes ¿Cuál es la probabilidad de que más de un 84% esté en contra de la política de becas Erasmus?

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 03
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial $X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 – (3 puntos) El número de personas con síntomas de alergia responde a la siguiente función, donde t son los días transcurridos desde el principio de la primavera: $A(t) = -200t^2 + 4800t + 36000$

- ¿En qué momento el número de personas afectadas es mayor y cuántas son?
- ¿A partir de qué momento el número de personas afectadas empieza a decrecer? ¿En qué momento no hay personas con síntomas de alergia?

3 – (2 puntos) Dos compañías aéreas con vuelos diarios entre Madrid y Barcelona han realizado estudios sobre la calidad de los mismos mediante cuestionarios a los viajeros. La compañía A ha realizado 45 encuestas en las que ha obtenido una puntuación media de 7'5 con desviación típica de 0'7. La compañía B ha realizado 55 encuestas obteniendo una puntuación media de 7'4 con una desviación típica de 0'6. Determinar si la diferencia es significativa para un nivel de significación del 5%.

4 – (2 puntos) Tres paracaidistas deportivos realizan tres saltos simultáneos sobre un portaviones, siendo la probabilidad de caer sobre el objetivo de 0'2, 0'3 y 0'4 respectivamente. Calcular las probabilidades de que en cada vuelo se alcancen los objetivos. (considerar todos los posibles casos. 0, 1, 2 o 3 paracaidistas alcancen el objetivo)

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Una editorial ha vendido las siguientes cantidades de libros en papel y electrónicos en los últimos años (matriz A), a los siguientes precios de venta (matriz B):

$$A = \begin{pmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 20000 & 15000 & 2000 \\ 1500 & 10000 & 30000 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Papel} \\ \text{Electrónico} \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} \text{Papel} & \text{Electrónico} \\ 45 & 30 \\ 40 & 20 \\ 40 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2011 \\ 2012 \\ 2013 \end{matrix}$$

- Obténgase la matriz $B \cdot A$. ¿Cuánto se ingresó por la venta de libros en el año 2011? ¿Qué elemento de la matriz $B \cdot A$ nos da esa información?
- ¿En qué orden habría que multiplicar las matrices para obtener los ingresos por la venta de libros en papel durante los 3 años? ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información? ¿A cuánto ascienden los ingresos por la venta de libros electrónicos?

2 – (2 puntos) Dada la función $f(x) = -ax^2 + bx$, con a y b parámetros reales

- Determinar si para $a = 4$, existe algún valor de b para el que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1/2$.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función hallada

3 – (2 puntos) Calcule las siguientes integrales

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \sin(6x) dx \quad \text{b) } \int_2^4 \frac{x^2}{x^3-1} dx$$

4 – (3 puntos) En una estimación sobre las alturas máximas de una planta exótica se obtuvieron los siguientes resultados en centímetros.

10'91, 10'94, 10'90, 10'93, 10'89, 10'88, 10'92

Se supone que la distribución de las alturas de las plantas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación 0'2.

- Determinar un intervalo de confianza al 98% para la media de todas las alturas estimadas obtenidas con el mismo método.
- En estas condiciones ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea de 0'25?

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2014	Duración: 90min.	MODELO 05
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (2 puntos) Una empresa de hardware puede ofertar dos lotes de equipamiento tecnológico a despachos profesionales. El primero incluye 3 ordenadores portátiles y 2 tablets, y el segundo incluye 2 ordenadores portátiles y 4 tablets. La primera promoción genera un beneficio de 200€ y la segunda 250€. Si la empresa tiene un stock de 120 portátiles y 200 tablets ¿Cuántos lotes de cada tipo de promoción debe ofertar la empresa para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el máximo beneficio alcanzado?

2 – (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz X que verifica la ecuación $X^T \cdot A = B$

3 – (3 puntos) Dada la función $f(x) = -ax^2 + bx$, con a y b parámetros reales

- Determinar si para $a = 4$, existe algún valor de b para el que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1/2$.
- Escribir la función hallada y hallar los valores que igualan a 0 la función.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función hallada

4 – (3 puntos) En una estimación sobre las alturas máximas de una planta exótica se obtuvieron los siguientes resultados en centímetros.

10'91, 10'94, 10'90, 10'93, 10'89, 10'88, 10'92

Se supone que la distribución de las alturas de las plantas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación 0'2.

- Determinar un intervalo de confianza al 98% para la media de todas las alturas estimadas obtenidas con el mismo método.
- En estas condiciones ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea de 0'25?

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Dado el problema de programación lineal: minimizar $z = 3x + 5y$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{Se pide:}$$

- Represente la región factible.
- ¿Hay condiciones redundantes? En caso afirmativo identifíquelas y en cualquier caso dé una explicación razonada a su respuesta.
- ¿En qué punto se alcanza el mínimo y cuánto vale?

2 – (3 puntos) El número de personas con síntomas de alergia responde a la siguiente función, donde t son los días transcurridos desde el principio de la primavera: $A(t) = -200t^2 + 4800t + 36000$

- ¿En qué momento el número de personas afectadas es mayor y cuántas son?
- ¿A partir de qué momento el número de personas afectadas empieza a decrecer? ¿En qué momento no hay personas con síntomas de alergia?

3 – (2 puntos) En una granja avícola el peso de los pollos se distribuye según una normal de media 1500gr. y una desviación típica de 250gr. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 64 pollos esté entre 1400 y 1800gr?

4 – (2 puntos) Tres paracaidistas deportivos realizan tres saltos simultáneos sobre un portaviones, siendo la probabilidad de caer sobre el objetivo de 0'2, 0'3 y 0'4 respectivamente. Calcular las probabilidades de que en cada vuelo se alcancen los objetivos.(considerar todos los posibles casos. 0, 1, 2 o 3 paracaidistas alcancen el objetivo)

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 07
				Hoja: 1 de 2	

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Una editorial ha vendido las siguientes cantidades de libros en papel y electrónicos en los últimos años (matriz A), a los siguientes precios de venta (matriz B):

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2011 & 2012 & 2013 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Papel} \\ \text{Electrónico} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20000 & 15000 & 2000 \\ 1500 & 10000 & 30000 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Papel} & \text{Electrónico} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2011 \\ 2012 \\ 2013 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 45 & 30 \\ 40 & 20 \\ 40 & 15 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Obténgase la matriz $B \cdot A$. ¿Cuánto se ingresó por la venta de libros en el año 2011? ¿Qué elemento de la matriz $B \cdot A$ nos da esa información?
- ¿En qué orden habría que multiplicar las matrices para obtener los ingresos por la venta de libros en papel durante los 3 años? ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información? ¿A cuánto ascienden los ingresos por la venta de libros electrónicos?

2 – (3 puntos) Determinar el valor de k para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 1] \\ k/x & \text{si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

3 – (2 puntos) El 80% de los estudiantes universitarios está en contra de la nueva política de becas Erasmus. Si tomamos una muestra de 90 estudiantes ¿Cuál es la probabilidad de que más de un 84% esté en contra de la política de becas Erasmus?

4 – (2 puntos) Tres paracaidistas deportivos realizan tres saltos simultáneos sobre un portaviones, siendo la probabilidad de caer sobre el objetivo de 0'2, 0'3 y 0'4 respectivamente. Calcular las probabilidades de que en cada vuelo se alcancen los objetivos.(considerar todos los posibles casos. 0, 1, 2 o 3 paracaidistas alcancen el objetivo).

OPCIÓN B

1 – (2 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial $X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 – (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz X que verifica la ecuación $X^T \cdot A = B$

3 – (3 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{3x}{x-3}$

- Razone cuál es el dominio de definición de $f(x)$.
- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

4 – (3 puntos) En una granja avícola el peso de los pollos se distribuye según una normal de media 1500gr. y una desviación típica de 250gr.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un pollo elegido al azar, pese más de 1950grs?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 64 pollos esté entre 1400 y 1800gr?

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
		Junio - 2014	Duración: 90min.	MODELO 09
Hoja: 1 de 2				

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 (2 puntos) Una editorial ha vendido las siguientes cantidades de libros en papel y electrónicos en los últimos años (matriz A), a los siguientes precios de venta (matriz B):

$$A = \begin{pmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 20000 & 15000 & 2000 \\ 1500 & 10000 & 30000 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Papel} \\ \text{Electrónico} \end{matrix} \quad B = \begin{pmatrix} \text{Papel} & \text{Electrónico} \\ 45 & 30 \\ 40 & 20 \\ 40 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2011 \\ 2012 \\ 2013 \end{matrix}$$

- Obténgase la matriz $B \cdot A$. ¿Cuánto se ingresó por la venta de libros en el año 2011? ¿Qué elemento de la matriz $B \cdot A$ nos da esa información?
- ¿En qué orden habría que multiplicar las matrices para obtener los ingresos por la venta de libros en papel durante los 3 años? ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información? ¿A cuánto ascienden los ingresos por la venta de libros electrónicos?

2 – (2 puntos) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar la matriz X que verifica la ecuación $X^T \cdot A = B$

3 (3 puntos) Dada la función $f(x) = -ax^2 + bx$, con a y b parámetros reales

- Determinar si para $a = 4$, existe algún valor de b para el que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1/2$.
- Escribir la función hallada y hallar los valores que igualan a 0 la función.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función hallada

4 – (3 puntos) El 80% de los estudiantes universitarios está en contra de la nueva política de becas Erasmus. Si tomamos una muestra de 90 estudiantes ¿Cuál es la probabilidad de que más de un 84% esté en contra de la política de becas Erasmus?

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial $X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2 – (2 puntos) El número de personas con síntomas de alergia responde a la siguiente función, donde t son los días transcurridos desde el principio de la primavera: $A(t) = -200t^2 + 4800t + 36000$

- ¿En qué momento el número de personas afectadas es mayor y cuántas son?
- ¿A partir de qué momento el número de personas afectadas empieza a decrecer? ¿En qué momento no hay personas con síntomas de alergia?

3 – (2 puntos) Calcule las siguientes integrales

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \sin(6x) dx \quad \text{b) } \int_2^4 \frac{x^2}{x^3-1} dx$$

4 – (3 puntos) Dos compañías aéreas con vuelos diarios entre Madrid y Barcelona han realizado estudios sobre la calidad de los mismos mediante cuestionarios a los viajeros. La compañía A ha realizado 45 encuestas en las que ha obtenido una puntuación media de 7'5 con desviación típica de 0'7. La compañía B ha realizado 55 encuestas obteniendo una puntuación media de 7'4 con una desviación típica de 0'6. Determinar si la diferencia es significativa para un nivel de significación del 5%. Y para un nivel de significación del 7%. Si quisiéramos posicionar mejor a una compañía que a otra, que nivel de significación usaríamos el del 5% o el del 7%.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2014	Duración: 90min.	MODELO 11
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Una empresa de hardware puede ofertar dos lotes de equipamiento tecnológico a despachos profesionales. El primero incluye 3 ordenadores portátiles y 2 tablets, y el segundo incluye 2 ordenadores portátiles y 4 tablets. La primera promoción genera un beneficio de 200€ y la segunda 250€. Si la empresa tiene un stock de 120 portátiles y 200 tablets ¿Cuántos lotes de cada tipo de promoción debe ofertar la empresa para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el máximo beneficio alcanzado?

2 – (2 puntos) Dada la función $f(x) = -ax^2 + bx$, con a y b parámetros reales

- Determinar si para $a = 4$, existe algún valor de b para el que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1/2$.
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función hallada

3 – (2 puntos) Calcule las siguientes integrales

$$a) \int_0^{\pi} \sin(6x) dx \quad b) \int_2^4 \frac{x^2}{x^2-1} dx$$

4 – (3 puntos) En una granja avícola el peso de los pollos se distribuye según una normal de media 1500gr. y una desviación típica de 250gr.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un pollo elegido al azar, pese más de 1950grs?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 64 pollos esté entre 1400 y 1800gr?

OPCIÓN B

1 – (2 puntos) Dado el problema de programación lineal: minimizar $z = 3x + 5y$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{Se pide:}$$

- Represente la región factible.
- ¿En qué punto se alcanza el mínimo y cuánto vale?

2 – (2 puntos) Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que verifica la ecuación $X^T \cdot A = B$

3 – (3 puntos) El número de personas con síntomas de alergia responde a la siguiente función, donde t son los días transcurridos desde el principio de la primavera: $A(t) = -200t^2 + 4800t + 36000$

- ¿En qué momento el número de personas afectadas es mayor y cuántas son?
- ¿A partir de qué momento el número de personas afectadas empieza a decrecer? ¿En qué momento no hay personas con síntomas de alergia?

4 – (3 puntos) En una estimación sobre las alturas máximas de una planta exótica se obtuvieron los siguientes resultados en centímetros.

10'91, 10'94, 10'90, 10'93, 10'89, 10'88, 10'92

Se supone que la distribución de las alturas de las plantas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación 0'2.

- Determinar un intervalo de confianza al 98% para la media de todas las alturas estimadas obtenidas con el mismo método.
- En estas condiciones ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea de 0'25?

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2014	Duración: 90min.	MODELO 13
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Una empresa de hardware puede ofertar dos lotes de equipamiento tecnológico a despachos profesionales. El primero incluye 3 ordenadores portátiles y 2 tablets, y el segundo incluye 2 ordenadores portátiles y 4 tablets. La primera promoción genera un beneficio de 200€ y la segunda 250€. Si la empresa tiene un stock de 120 portátiles y 200 tablets ¿Cuántos lotes de cada tipo de promoción debe ofertar la empresa para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el máximo beneficio alcanzado?

2 – (2 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{3x}{x-3}$

- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.
- Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

3 – (2 puntos) Calcule las siguientes integrales

a) $\int_0^{\pi} \sin(6x) dx$ b) $\int_2^4 \frac{x^2}{x^3-1} dx$

4 – (3 puntos) En una estimación sobre las alturas máximas de una planta exótica se obtuvieron los siguientes resultados en centímetros.

10'91, 10'94, 10'90, 10'93, 10'89, 10'88, 10'92

Se supone que la distribución de las alturas de las plantas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación 0'2.

- Determinar un intervalo de confianza al 98% para la media de todas las alturas estimadas obtenidas con el mismo método.
- En estas condiciones ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza sea de 0'25?

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Dado el problema de programación lineal: minimizar $z = 3x + 5y$

con las restricciones
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$
 Se pide:

- Represente la región factible.
- ¿Hay condiciones redundantes? En caso afirmativo identifíquelas y en cualquier caso dé una explicación razonada a su respuesta.
- ¿En qué punto se alcanza el mínimo y cuánto vale?

2 – (3 puntos) Determinar el valor de k para que sea continua la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 1] \\ k/x & \text{si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

3 – (2 puntos) Dos compañías aéreas con vuelos diarios entre Madrid y Barcelona han realizado estudios sobre la calidad de los mismos mediante cuestionarios a los viajeros. La compañía A ha realizado 45 encuestas en las que ha obtenido una puntuación media de 7'5 con desviación típica de 0'7. La compañía B ha realizado 55 encuestas obteniendo una puntuación media de 7'4 con una desviación típica de 0'6. Determinar si la diferencia es significativa para un nivel de significación del 5%.

4 – (2 puntos) Tres paracaidistas deportivos realizan tres saltos simultáneos sobre un portaviones, siendo la probabilidad de caer sobre el objetivo de 0'2, 0'3 y 0'4 respectivamente. Calcular las probabilidades de que en cada vuelo se alcancen los objetivos. (considerar todos los posibles casos. 0, 1, 2 o 3 paracaidistas alcancen el objetivo)

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2014	Duración: 90min.	MODELO 02
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (2 puntos) Una naviera quiere implantar una nueva línea de ferrys entre dos ciudades. La oferta de plazas ha de ser superior a 8400 personas y 3000 vehículos. Los ferrys que posee son de dos tipos, el primero tiene un coste de 3.000€ y puede transportar a 900 personas y 300 vehículos; el segundo tiene un coste de 2.000€ y puede transportar a 300 personas y 150 vehículos. La naviera dispone de 10 transbordadores de cada tipo. ¿Cuántos transbordadores de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

2 – (2 puntos) Calcule la matriz X que se verifica: $3X - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

3 – (3 puntos) La variación, en céntimos de euro, de la cotización bursátil de las acciones de una empresa sigue la función $V(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$, en la sesión del día entre las 09:00 y las 17:00 horas ($0 \leq t \leq 8$).

- ¿Cuál ha sido la variación al cerrar la sesión? ¿Cuál ha sido la cotización final sabiendo que ayer cotizaba a 30€?
- Hallar los intervalos horarios en que la variación ha crecido y aquellos en que ha decrecido
- Hallar los extremos relativos, y la variación en esos momentos.

4 – (3 puntos) Sean A y B dos sucesos de un espacio de sucesos S, tales que: $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y

$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Se pide:

- $P(A^c)$ y $P(B^c)$
- $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A \cap B)$
- $P(A \cap B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$

Nota: Escribir $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Dado el problema de programación lineal: maximizar $z = 3x + 5y$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{Se pide:}$$

- Represente la región factible.
- ¿Hay condiciones redundantes? En caso afirmativo identifíquelas y en cualquier caso dé una explicación razonada a su respuesta.
- ¿En qué punto se alcanza el máximo y cuánto vale?

2 – (2 puntos) Una empresa de venta online tiene las siguientes funciones de ingresos y gastos, en euros, con x la cantidad de unidades vendidas: $I(x) = x^3 + 2x^2 + 225x$; $G(x) = x^3 + x^2 + 2000x + 500000$. Determine:

- La función del beneficio anual y la cantidad de unidades vendidas para que el beneficio sea nulo.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio.

3 – (2 puntos) Hallar el área que ocupa el logotipo de una compañía aérea y que está delimitado por las funciones $f(x) = (x - 1)^2$ y $g(x) = 2 - (x - 1)^2$.

4 – (3 puntos) En un centro comercial, el tiempo de espera en la línea de cajas es una variable aleatoria normal de media 6 minutos y desviación típica de 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes un día cualquiera. Se pide:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera para pagar en caja para una muestra de 16 clientes no supere los cinco minutos?
- Si tomamos muestras de 49 clientes ¿Qué distribución seguirá la media muestral?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera no supere los 10 minutos si tomamos muestras de 49 clientes?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc			
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			
		Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 04
				Hoja: 1 de 2	

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

- 1 – (2 puntos) Dado el problema de programación lineal: maximizar $z = 3x + 5y$
con las restricciones
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$
 Se pide:

- Represente la región factible.
- ¿En qué punto se alcanza el máximo y cuánto vale?

2 – (2 puntos) Calcule la matriz X que se verifica: $3X - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

3 – (3 puntos) Una empresa de venta online tiene las siguientes funciones de ingresos y gastos, en euros, con x la cantidad de unidades vendidas: $I(x) = x^3 + 2x^2 + 225x$; $G(x) = x^3 + x^2 + 2000x + 500000$. Determine:

- La función del beneficio anual y la cantidad de unidades vendidas para que el beneficio sea nulo.
- El valor del beneficio si no se vende ninguna unidad y el número de unidades vendidas que hace mínimo en la función de beneficio.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio.

4 – (3 puntos) Sean A y B dos sucesos de un espacio de sucesos S, tales que: $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Se pide:

- $P(A^c)$ y $P(B^c)$
- $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A \cap B)$
- $P(A \cap B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$

Nota: Escribir $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Una naviera quiere implantar una nueva línea de ferrys entre dos ciudades. La oferta de plazas ha de ser superior a 8400 personas y 3000 vehículos. Los ferrys que posee son de dos tipos, el primero tiene un coste de 3.000€ y puede transportar a 900 personas y 300 vehículos; el segundo tiene un coste de 2.000€ y puede transportar a 300 personas y 150 vehículos. La naviera dispone de 10 transbordadores de cada tipo. ¿Cuántos transbordadores de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

2 – (3 puntos) La variación, en céntimos de euro, de la cotización bursátil de las acciones de una empresa sigue la función $V(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$, en la sesión del día entre las 09:00 y las 17:00 horas ($0 \leq t \leq 8$).

- ¿Cuál ha sido la variación al cerrar la sesión? ¿Cuál ha sido la cotización final sabiendo que ayer cotizaba a 30€?
- Hallar los intervalos horarios en que la variación ha crecido y aquellos en que ha decrecido
- Hallar los extremos relativos, y la variación en esos momentos.
-

3 – (2 puntos) En un centro comercial, el tiempo de espera en la línea de cajas es una variable aleatoria normal de media 6 minutos y desviación típica de 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes un día cualquiera. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera para pagar en caja para una muestra de 16 clientes no supere los cinco minutos?

4 – (2 puntos) Una empresa de trabajo temporal dispone de una oferta de 1500 puestos base, 900 puestos técnicos y 600 puestos para especialistas. Se sabe que el 1'5% de la oferta de puestos base, el 2% de los técnicos y el 4% de los especialistas no pertenecen a la Unión Europea. Si se elige una oferta al azar,

- ¿Cuál es la probabilidad de que no pertenezca a la Unión Europea?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea un experto si sabemos que trabaja en la Unión Europea?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Junio - 2014	Duración: 90min.	MODELO 06
			Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Una naviera quiere implantar una nueva línea de ferrys entre dos ciudades del estrecho. La oferta de plazas ha de ser superior a 8400 personas y 3000 vehículos. Los ferrys que posee son de dos tipos, el primero tiene un coste de 3.000€ y puede transportar a 900 personas y 300 vehículos; el segundo tiene un coste de 2.000€ y puede transportar a 300 personas y 150 vehículos. La naviera dispone de 10 transbordadores de cada tipo. ¿Cuántos transbordadores de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

2 – (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - \frac{8}{3}$ hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión.

3 – (2 puntos) Hallar el área que ocupa el logotipo de una compañía aérea y que está delimitado por las funciones $f(x) = (x-1)^2$ y $g(x) = 2 - (x-1)^2$.

4 – (3 puntos) En un centro comercial, el tiempo de espera en la línea de cajas es una variable aleatoria normal de media 6 minutos y desviación típica de 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes un día cualquiera. Se pide:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera para pagar en caja para una muestra de 16 clientes no supere los cinco minutos?
- Si tomamos muestras de 49 clientes ¿Qué distribución seguirá la media muestral?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera no supere los 10 minutos si tomamos muestras de 49 clientes?

OPCIÓN B

1 – (2 puntos) Dado el problema de programación lineal: maximizar $z = 3x + 5y$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

- Represente la región factible.
- ¿En qué punto se alcanza el máximo y cuánto vale?

2 – (2 puntos) Calcule la matriz X para que se verifique:

$$3X - 2 \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3 – (3 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$

- Razone cuál es el dominio de definición de $f(x)$.
- Estudiar las asíntotas de la función
- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

4 – (3 puntos) En el parque móvil de una determinada ciudad se desea conocer la probabilidad de que un vehículo elegido al azar tenga que pasar la ITV en el año en curso. De 300 vehículos tomados al azar 15 de ellos tenían que pasar la inspección.

- Hallar un intervalo de confianza al 95% para la probabilidad pedida.
- ¿Cuántos vehículos se deberían tomar para que con una probabilidad del 95% el error máximo al estimar la proporción de vehículos a inspeccionar sea del 0'05?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 08
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Dado el problema de programación lineal: maximizar $z = 3x + 5y$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{Se pide:}$$

- Represente la región factible.
- ¿Hay condiciones redundantes? En caso afirmativo identifíquelas y en cualquier caso dé una explicación razonada a su respuesta.
- ¿En qué punto se alcanza el máximo y cuánto vale?

2 – (2 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

- Estudiar las asíntotas de la función
- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

3 – (2 puntos) Hallar el área que ocupa el logotipo de una compañía aérea y que está delimitado por las funciones $f(x) = (x - 1)^2$ y $g(x) = 2 - (x - 1)^2$.

4 – (3 puntos) Un club deportivo cuenta con dos tipos de deportistas. Los que entrenan en grupo en las instalaciones del club y los que entrenan por libre. El primer grupo está formado por 70 deportistas y el segundo por 30. En la toma de tiempos de una prueba de 100 metros lisos, el primer grupo ha dado un tiempo medio de 10 segundos con una desviación típica de 0'1. El segundo grupo ha dado un tiempo medio de 9'9 segundos con una desviación de 0'09. Sabiendo que la variable que representa el tiempo medio empleado en ambos casos se distribuye según una normal ¿es posible afirmar con el 95% de confianza que hay diferencia de tiempos entre los deportistas que entrenan en grupo y los que lo hacen por libre?

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Una naviera quiere implantar una nueva línea de ferrys entre dos ciudades del estrecho. La oferta de plazas ha de ser superior a 8400 personas y 3000 vehículos. Los ferrys que posee son de dos tipos, el primero tiene un coste de 3.000€ y puede transportar a 900 personas y 300 vehículos; el segundo tiene un coste de 2.000€ y puede transportar a 300 personas y 150 vehículos. La naviera dispone de 10 transbordadores de cada tipo. ¿Cuántos transbordadores de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

2 – (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - \frac{8}{3}$ hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión.

3 – (2 puntos) Sean A y B dos sucesos de un espacio de sucesos S, tales que:

$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}, \text{ Se pide:}$$

- $P(A^c)$ y $P(B^c)$
- $P(A \cap B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$

Nota: Escribir $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

4 – (2 puntos) Una empresa de trabajo temporal dispone de una oferta de 1500 puestos base, 900 puestos técnicos y 600 puestos para especialistas. Se sabe que el 1'5% de la oferta de puestos base, el 2% de los técnicos y el 4% de los especialistas no pertenecen a la Unión Europea. Si se elige una oferta al azar,

- ¿Cuál es la probabilidad de que no pertenezca a la Unión Europea?
- Sabiendo que el puesto elegido no pertenece a la Unión Europea ¿cuál es la probabilidad de que sea un técnico?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
		Junio - 2014	Duración: 90min.	MODELO 10
Hoja: 1 de 2				

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Dado el problema de programación lineal: maximizar $z = 3x - 5y$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 2, y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{Se pide:}$$

- Represente la región factible.
- ¿Hay condiciones redundantes? En caso afirmativo identifíquelas y en cualquier caso dé una explicación razonada a su respuesta.
- ¿En qué punto se alcanza el máximo y cuánto vale?

2 – (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - \frac{8}{3}$ hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión.

3 – (2 puntos) En el parque móvil de una determinada ciudad se desea conocer la probabilidad de que un vehículo elegido al azar tenga que pasar la ITV en el año en curso. De 300 vehículos tomados al azar 15 de ellos tenían que pasar la inspección. Hallar un intervalo de confianza al 95% para la probabilidad pedida.

4 – (2 puntos) Una empresa de trabajo temporal dispone de una oferta de 1500 puestos base, 900 puestos técnicos y 600 puestos para especialistas. Se sabe que el 1'5% de la oferta de puestos base, el 2% de los técnicos y el 4% de los especialistas no pertenecen a la Unión Europea. Si se elige una oferta al azar,

- ¿Cuál es la probabilidad de que no pertenezca a la Unión Europea?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea un experto si sabemos que trabaja en la Unión Europea?

OPCIÓN B

1 – (2 puntos) Utilizando las propiedades de las matrices obtenga las matrices X e Y tales que

$$\begin{cases} -3X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{cases}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2 – (2 puntos) Calcule la matriz X para que se verifique:

$$3X - 2 \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3 – (3 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

- Razone cuál es el dominio de definición de $f(x)$.
- Estudiar las asíntotas de la función
- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

4 – (3 puntos) En un centro comercial, el tiempo de espera en la línea de cajas es una variable aleatoria normal de media 6 minutos y desviación típica de 2 minutos. Se toman muestras aleatorias del tiempo de espera de los clientes un día cualquiera. Se pide:

- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera para pagar en caja para una muestra de 16 clientes no supere los cinco minutos?
- Si tomamos muestras de 49 clientes ¿Qué distribución seguirá la media muestral?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera no supere los 10 minutos si tomamos muestras de 49 clientes?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
		Junio - 2014	Duración: 90min.	MODELO 12
Hoja: 1 de 2				

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Utilizando las propiedades de las matrices obtenga las matrices X e Y tales que

$$\begin{cases} -3X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{cases}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2 – (3 puntos) La variación, en céntimos de euro, de la cotización bursátil de las acciones de una empresa sigue la función $V(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$, en la sesión del día entre las 09:00 y las 17:00 horas ($0 \leq t \leq 8$).

- ¿Cuál ha sido la variación al cerrar la sesión? ¿Cuál ha sido la cotización final sabiendo que ayer cotizaba a 30€?
- Hallar los intervalos horarios en que la variación ha crecido y aquellos en que ha decrecido
- Hallar los extremos relativos, y la variación en esos momentos.

3 – (2 puntos) Un club deportivo cuenta con dos tipos de deportistas. Los que entrenan en grupo en las instalaciones del club y los que entrenan por libre. El primer grupo está formado por 70 deportistas y el segundo por 30. En la toma de tiempos de una prueba de 100 metros lisos, el primer grupo ha dado un tiempo medio de 10 segundos con una desviación típica de 0'1. El segundo grupo ha dado un tiempo medio de 9'9 segundos con una desviación de 0'09. Sabiendo que la variable que representa el tiempo medio empleado en ambos casos se distribuye según una normal ¿es posible afirmar con el 95% de confianza que hay diferencia de tiempos entre los deportistas que entrenan en grupo y los que lo hacen por libre?

4 – (2 puntos) Una empresa de trabajo temporal dispone de una oferta de 1500 puestos base, 900 puestos técnicos y 600 puestos para especialistas. Se sabe que el 1'5% de la oferta de puestos base, el 2% de los técnicos y el 4% de los especialistas no pertenecen a la Unión Europea. Si se elige una oferta al azar,

- ¿Cuál es la probabilidad de que no pertenezca a la Unión Europea?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea un experto si sabemos que trabaja en la Unión Europea?

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Dado el problema de programación lineal: maximizar $z = 3x - 5y$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 2, y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \quad \text{Se pide:}$$

- Represente la región factible.
- ¿Hay condiciones redundantes? En caso afirmativo identifíquelas y en cualquier caso dé una explicación razonada a su respuesta.
- ¿En qué punto se alcanza el máximo y cuánto vale?

2 – (2 puntos) Una empresa de venta online tiene las siguientes funciones de ingresos y gastos, en euros, con x la cantidad de unidades vendidas: $I(x) = x^3 + 2x^2 + 225x$; $G(x) = x^3 + x^2 + 2000x + 500000$. Determine:

- La función del beneficio anual y la cantidad de unidades vendidas para que el beneficio sea nulo.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio.

3 – (2 puntos) Hallar el área que ocupa el logotipo de una compañía aérea y que está delimitado por las funciones $f(x) = (x - 1)^2$ y $g(x) = 2 - (x - 1)^2$.

4 – (3 puntos) Sean A y B dos sucesos de un espacio de sucesos S, tales que:

$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{2}{3}. \text{ Se pide:}$$

- $P(A^c)$ y $P(B^c)$
- $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A \cap B)$
- $P(A \cap B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$

Nota: Escribir $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2014	Duración: 90min.		MODELO 14
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

- 1 – (2 puntos) Dado el problema de programación lineal: maximizar $z = 3x - 5y$
con las restricciones
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 2, y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$
 . Se pide:

- Represente la región factible.
- ¿En qué punto se alcanza el máximo y cuánto vale?

- 2 – (2 puntos) Calcule la matriz X para que se verifique:

$$3X - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- 3 – (3 puntos) Una empresa de venta online tiene las siguientes funciones de ingresos y gastos, en euros, con x la cantidad de unidades vendidas: $I(x) = x^3 + 2x^2 + 225x$; $G(x) = x^3 + x^2 + 2000x + 500000$. Determine:

- La función del beneficio anual y la cantidad de unidades vendidas para que el beneficio sea nulo.
- El valor del beneficio si no se vende ninguna unidad y el número de unidades vendidas que hace mínimo en la función de beneficio.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio.

- 4 – (3 puntos) En el parque móvil de una determinada ciudad se desea conocer la probabilidad de que un vehículo elegido al azar tenga que pasar la ITV en el año en curso. De 300 vehículos tomados al azar 15 de ellos tenían que pasar la inspección.

- Hallar un intervalo de confianza al 95% para la probabilidad pedida.
- ¿Cuántos vehículos se deberían tomar para que con una probabilidad del 95% el error máximo al estimar la proporción de vehículos a inspeccionar sea del 0'05?

OPCIÓN B

- 1 – (3 puntos) Utilizando las propiedades de las matrices obtenga las matrices X e Y tales que

$$\begin{cases} -3X + Y = A \\ X - 2Y = B \end{cases}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- 2 – (2 puntos) La variación, en céntimos de euro, de la cotización bursátil de las acciones de una empresa sigue la función $V(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$, en la sesión del día entre las 09:00 y las 17:00 horas ($0 \leq t \leq 8$).

- ¿Cuál ha sido la variación al cerrar la sesión? ¿Cuál ha sido la cotización final sabiendo que ayer cotizaba a 30€?
- Hallar los intervalos horarios en que la variación ha crecido y aquellos en que ha decrecido

- 3 – (2 puntos) Hallar el área que ocupa el logotipo de una compañía aérea y que está delimitado por las funciones $f(x) = (x - 1)^2$ y $g(x) = 2 - (x - 1)^2$.

- 4 – (3 puntos) Un club deportivo cuenta con dos tipos de deportistas. Los que entrenan en grupo en las instalaciones del club y los que entrenan por libre. El primer grupo está formado por 70 deportistas y el segundo por 30. En la toma de tiempos de una prueba de 100 metros lisos, el primer grupo ha dado un tiempo medio de 10 segundos con una desviación típica de 0'1. El segundo grupo ha dado un tiempo medio de 9'9 segundos con una desviación de 0'09. Sabiendo que la variable que representa el tiempo medio empleado en ambos casos se distribuye según una normal ¿es posible afirmar con el 95% de confianza que hay diferencia de tiempos entre los deportistas que entrenan en grupo y los que lo hacen por libre?

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Sept - 2014	Duración: 90min.		MODELO 15
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Diana y Beatriz van a comprar discos y películas. Diana compra 1 película y 2 discos de música. Beatriz compra 2 películas y 3 discos.

- Escriba la matriz 2 por 2 que expresa el número de discos y películas comprados por cada una.
 - Si han gastado 42 y 72 euros respectivamente calcular el precio de las películas y de los discos.
- Nota: Resolver por el método de Gauss o por algún otro método matricial (Cramer o matriz inversa).

2 – (3 puntos) Una empresa de desarrollo de videojuegos estima que sus ganancias durante los próximos años seguirán la fórmula $g(t) = \frac{-75.000 + 125.000t}{t + 4}$ donde la variable $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ representa el tiempo en años medido a partir del presente.

- Halle las ganancias correspondientes a los años primero y cuarto.
- Determine si las ganancias aumentan o disminuyen con el paso del tiempo. Razonar la respuesta.
- ¿Se estabilizan las ganancias cuando t crece? ¿Hacia qué valor? Razone la respuesta.

3 – (2 puntos) Se está estudiando el aumento de niños entre 6 y 12 años que presentan problemas de déficit de atención (TDA). para conocer la probabilidad de que un escolar elegido al azar presente TDA. En una muestra de 100 escolares se ha comprobado que 6 de ellos manifiestan este problema. Determinar un intervalo de confianza al 95% para la probabilidad pedida.

4 – (2 puntos) La altura de los futbolistas de un club deportivo se distribuye normalmente con una media de 180cm y desviación típica de 10cm.

- Calcular la probabilidad de que los futbolistas midan más de 190cm.
- Calcular la probabilidad de que los futbolistas midan más de 170cm.
- Calcular la probabilidad de que los futbolistas midan entre 175cm y 185cm

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) En un restaurante hacen pedidos al distribuidor de leche y agua de forma online y se obtiene un 10% de descuento en la leche y un 12,5% en el agua. Al hacer un pedido de 200 litros de leche y 480 botellines de agua se han de pagar 348€ y se ahorran 44€. Calcular los precios originales de los productos y el precio unitario pagado por cada uno.

NOTA: Usar Gauss o cálculo matricial en la resolución del problema

2 – (2 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{-2x^3}{3} + 2x + \frac{2}{3}$ hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión.

3 – (2 puntos) Encontrar la función cuya segunda derivada es $2x$, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(-2, 8)$.

4 – (3 puntos) En tres bolsas de lona numeradas tenemos repartidas bolas de colores de la siguiente forma: La primera bolsa tiene 5 bolas rojas y 2 blancas, la segunda contiene 3 bolas rojas y 1 blanca y la tercera tiene 2 bolas rojas y 7 blancas.

- Escogemos una bolsa al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la 1ª bolsa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas consecutivamente y con reemplazamiento, estas sean blancas?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Sept - 2014	Duración: 90min.		MODELO 16
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Un economista trabaja en una empresa de lunes a viernes de 9 a 13 horas. Por las tardes colabora en una asesoría los lunes y los miércoles de 16 a 19 horas, e imparte clases en una academia los martes y los jueves de 17 a 19 horas.

- Planificar matricialmente las horas de trabajo semanales diferenciando por días y trabajos.
- Le pagan a 15€ las horas que trabaja en la empresa, a 20€ los horas que trabaja en la asesoría y a 25€ las horas que imparte clases en la academia. Expresar matricialmente los ingresos diarios.

2 – (2 puntos) Un fabricante de regalos quiere incorporar a su catálogo espejos cuadrangulares de bolsillo de perímetro 24. Hallar la superficie del espejo. ¿La superficie obtenida es mínima o máxima?

3 – (2 puntos) Encontrar la función cuya segunda derivada es $4x$, y cuya gráfica presenta un máximo en el punto $(1, 2)$.

4 – (3 puntos) Si A y B son sucesos tales que $P(B/A) = \frac{1}{2}$, $P(A/B) = \frac{1}{4}$ y $P(A) = \frac{1}{4}$. Calcular:

- $P(A \cup B)$
- $P(A^c/B^c)$
- ¿Se verifica $P(A/B) + P(A/B^c) = 1$? Justificar la respuesta.

OPCIÓN B

1 – (2 puntos) Se va a poner en marcha una nueva cadena de tv, que emitirá unas cuantas horas al día. Su programación consistirá en dibujos, películas y noticias. Se quiere que el 60% de las horas de emisión de dibujos más el 50% de las horas de emisión de películas sean el 30% del total de horas de emisión. Asimismo se quiere que el 20% de las horas de emisión de dibujos más el 60% de las horas de emisión de películas más el 60% de horas de emisión de noticias representen la mitad de las horas de emisión. Finalmente se quiere emitir 1 hora más de películas que de dibujos cada día. ¿Cuántas horas diarias de emisión habrá? ¿Cómo se distribuyen las horas de emisión por tipo de programación?

2 – (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

- Encuentre el valor de x , tal que $B^2 = A$
- Encuentre el valor de x , tal que $A + B + C = 11 \cdot I_2$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2

3 – (3 puntos) Una compañía tecnológica predice los beneficios futuros mediante la función

$$B(t) = \frac{4t^2}{t^2+2} - 3, \text{ en millones de euros.}$$

- ¿Cuál es el beneficio en los años 1 y 5? ¿En qué momento deja de tener pérdidas la compañía?.
- ¿Hacia qué valor tiende el beneficio?.

4 – (3 puntos) Un club deportivo va a presentarse a una competición en la que se clasificará para la siguiente fase si la puntuación media obtenida por los deportistas es superior a 24 puntos. La distribución de los puntos obtenidos por los equipos sigue una distribución normal de media 25 con una desviación típica de 5 puntos. Los equipos pueden estar formados por 15 o 25 deportistas. ¿Qué tamaño de equipo llevará el entrenador a la competición? Justifica la respuesta.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
		Sept - 2014	Duración: 90min.	
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) En un restaurante hacen pedidos al distribuidor de leche y agua de forma online y se obtiene un 10% de descuento en la leche y un 12,5% en el agua. Al hacer un pedido de 200 litros de leche y 480 botellines de agua se han de pagar 348€ y se ahorran 44€. Calcular los precios originales de los productos y el precio unitario pagado por cada uno.

NOTA: Usar Gauss o cálculo matricial en la resolución del problema

2 – (2 puntos) Una empresa de desarrollo de videojuegos estima que sus ganancias durante los próximos años seguirán la fórmula $g(t) = \frac{-75.000 + 125.000t}{t + 4}$ donde la variable $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ representa el tiempo en años medido a partir del presente.

- Determine si las ganancias aumentan o disminuyen con el paso del tiempo. Razonar la respuesta.
- ¿Se estabilizan las ganancias cuando t crece? ¿Hacia qué valor? Razone la respuesta.

3 – (2 puntos) Encontrar la función cuya segunda derivada es $2x$, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(-2, 8)$.

4 – (3 puntos) En tres bolsas de lona numeradas tenemos repartidas bolas de colores de la siguiente forma: La primera bolsa tiene 5 bolas rojas y 2 blancas, la segunda contiene 3 bolas rojas y 1 blanca y la tercera tiene 2 bolas rojas y 7 blancas.

- Escogemos una bolsa al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la 1ª bolsa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas consecutivamente y con reemplazamiento, estas sean blancas?

OPCIÓN B

1 – (2 puntos) Diana y Beatriz van a comprar discos y películas. Diana compra 1 película y 2 discos de música. Beatriz compra 2 películas y 3 discos.

- Escriba la matriz 2 por 2 que expresa el número de discos y películas comprados por cada una.
 - Si han gastado 42 y 72 euros respectivamente calcular el precio de las películas y de los discos.
- Nota: Resolver por el método de Gauss o por algún otro método matricial (Cramer o matriz inversa).

2 – (2 puntos) Calcule todos los productos posibles de dos factores con las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3 – (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{-2x^3}{3} + 2x + \frac{2}{3}$ hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión.

4 – (3 puntos) Se está estudiando el aumento de niños entre 6 y 12 años que presentan problemas de déficit de atención (TDA) para conocer la probabilidad de que un escolar elegido al azar presente TDA. En una muestra de 100 escolares se ha comprobado que 6 de ellos manifiestan este problema.

- Determinar un intervalo de confianza al 95% para la probabilidad pedida.
- ¿Cuántos escolares se deberían estudiar para que, con probabilidad 0'95, el error máximo en la estimación de la proporción de niños con TDA del 0'01?

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Sept - 2014	Duración: 90min.		MODELO 18
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (2 puntos) Un economista trabaja en una empresa de lunes a viernes de 9 a 13 horas. Por las tardes colabora en una asesoría los lunes y los miércoles de 16 a 19 horas, e imparte clases en una academia los martes y los jueves de 17 a 19 horas.

- Planificar matricialmente las horas de trabajo semanales diferenciando por días y trabajos.
- Le pagan a 15€ las horas que trabaja en la empresa, a 20€ los horas que trabaja en la asesoría y a 25€ las horas que imparte clases en la academia. Expresar matricialmente los ingresos diarios.

2 – (2 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

- Encuentre el valor de x , tal que $B^2 = A$
- Encuentre el valor de x , tal que $A + B + C = 11 \cdot I_2$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2

3 – (3 puntos) Una compañía tecnológica predice los beneficios futuros mediante la función

$$B(t) = \frac{4t^2}{t^2 + 2} - 3, \text{ en millones de euros.}$$

- ¿Cuál es el beneficio en los años 1 y 5? ¿En qué momento deja de tener pérdidas la compañía?
- ¿Hacia qué valor tiende el beneficio?

4 – (3 puntos) Un club deportivo va a presentarse a una competición en la que se clasificará para la siguiente fase si la puntuación media obtenida por los deportistas es superior a 24 puntos. La distribución de los puntos obtenidos por los equipos sigue una distribución normal de media 25 con una desviación típica de 5 puntos. Los equipos pueden estar formados por 15 o 25 deportistas. ¿Qué tamaño de equipo llevará el entrenador a la competición? Justifica la respuesta.

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Se va a poner en marcha una nueva cadena de tv, que emitirá unas cuantas horas al día. Su programación consistirá en dibujos, películas y noticias. Se quiere que el 60% de las horas de emisión de dibujos más el 50% de las horas de emisión de películas sean el 30% del total de horas de emisión. Asimismo se quiere que el 20% de las horas de emisión de dibujos más el 60% de las horas de emisión de películas más el 60% de horas de emisión de noticias representen la mitad de las horas de emisión. Finalmente se quiere emitir 1 hora más de películas que de dibujos cada día. ¿Cuántas horas diarias de emisión habrá? ¿Cómo se distribuyen las horas de emisión por tipo de programación?

2 – (3 puntos) Un fabricante de regalos quiere incorporar a su catálogo espejos cuadrangulares de bolsillo de perímetro 24. Hallar la superficie del espejo. ¿La superficie obtenida es mínima o máxima?

3 – (2 puntos) Si A y B son sucesos tales que $P(B/A) = \frac{1}{2}$, $P(A/B) = \frac{1}{4}$ y $P(A) = \frac{1}{4}$

Calcular:

- $P(A \cup B)$
- ¿Se verifica $P(A/B) + P(A/B^c) = 1$? Justificar la respuesta.

4 – (2 puntos) En una determinada ciudad española la temperatura máxima durante el mes de junio se distribuye como una normal con media 23° y desviación típica 5°. Calcule el número de días del mes en los que se espera que la temperatura esté comprendida entre 21° y 27°.

 03100311		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Sept - 2014	Duración: 90min.		MODELO 19
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (2 puntos) En un restaurante hacen pedidos al distribuidor de leche y agua de forma online y se obtiene un 10% de descuento en la leche y un 12,5% en el agua. Al hacer un pedido de 200 litros de leche y 480 botellines de agua se han de pagar 348€ y se ahorran 44€. Calcular los precios originales de los productos y el precio unitario pagado por cada uno.

NOTA: Usar Gauss o cálculo matricial en la resolución del problema

2 – (2 puntos) Calcule todos los productos posibles de dos factores con las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3 – (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{-2x^3}{3} + 2x + \frac{2}{3}$ hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión.

4 – (3 puntos) Se está estudiando el aumento de niños entre 6 y 12 años que presentan problemas de déficit de atención (TDA), para conocer la probabilidad de que un escolar elegido al azar presente TDA. En una muestra de 100 escolares se ha comprobado que 6 de ellos manifiestan este problema.

- Determinar un intervalo de confianza al 95% para la probabilidad pedida.
- ¿Cuántos escolares se deberían estudiar para que, con probabilidad 0'95, el error máximo en la estimación de la proporción de niños con TDA del 0'01?

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Diana y Beatriz van a comprar discos y películas. Diana compra 1 película y 2 discos de música. Beatriz compra 2 películas y 3 discos.

- Escriba la matriz 2 por 2 que expresa el número de discos y películas comprados por cada una.
 - Si han gastado 42 y 72 euros respectivamente calcular el precio de las películas y de los discos.
- Nota: Resolver por el método de Gauss o por algún otro método matricial (Cramer o matriz inversa).

2 – (3 puntos) Una empresa de desarrollo de videojuegos estima que sus ganancias durante los próximos años seguirán la fórmula $g(t) = \frac{-75.000 + 125.000t}{t+4}$ donde la variable $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ representa el tiempo en años medido a partir del presente.

- Halle las ganancias correspondientes a los años primero y cuarto.
- Determine si las ganancias aumentan o disminuyen con el paso del tiempo. Razonar la respuesta.
- ¿Se estabilizan las ganancias cuando t crece? ¿Hacia qué valor? Razone la respuesta.

3 – (2 puntos) En tres bolsas de lona numeradas tenemos repartidas bolas de colores de la siguiente forma: La primera bolsa tiene 5 bolas rojas y 2 blancas, la segunda contiene 3 bolas rojas y 1 blanca y la tercera tiene 2 bolas rojas y 7 blancas.

- Escogemos una bolsa al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la 1ª bolsa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas consecutivamente y con reemplazamiento, estas sean blancas?

4 – (2 puntos) La altura de los futbolistas de un club deportivo se distribuye normalmente con una media de 180cm y desviación típica de 10cm.

- Calcular la probabilidad de que los futbolistas midan más de 190cm.
- Calcular la probabilidad de que los futbolistas midan más de 170cm.
- Calcular la probabilidad de que los futbolistas midan entre 175cm y 185cm.

 03100570		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Soc		
			PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	
	Sept - 2014	Duración: 90min.		MODELO 20
				Hoja: 1 de 2

NOTAS ACLARATORIAS: El examen presenta dos opciones A y B. El alumno deberá elegir una de ellas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

OPCIÓN A

1 – (3 puntos) Se va a poner en marcha una nueva cadena de tv, que emitirá unas cuantas horas al día. Su programación consistirá en dibujos, películas y noticias. Se quiere que el 60% de las horas de emisión de dibujos más el 50% de las horas de emisión de películas sean el 30% del total de horas de emisión. Asimismo se quiere que el 20% de las horas de emisión de dibujos más el 60% de las horas de emisión de películas más el 60% de horas de emisión de noticias representen la mitad de las horas de emisión. Finalmente se quiere emitir 1 hora más de películas que de dibujos cada día. ¿Cuántas horas diarias de emisión habrá? ¿Cómo se distribuyen las horas de emisión por tipo de programación?

2 – (3 puntos) Un fabricante de regalos quiere incorporar a su catálogo espejos cuadrangulares de bolsillo de perímetro 24. Hallar la superficie del espejo. ¿La superficie obtenida es mínima o máxima?

3 – (2 puntos) Si A y B son sucesos tales que $P(B/A) = \frac{1}{2}$, $P(A/B) = \frac{1}{4}$ y $P(A) = \frac{1}{4}$. Calcular:

a) $P(A \cup B)$

b) ¿Se verifica $P(A/B) + P(A/B^c) = 1$? Justificar la respuesta.

4 – (2 puntos) En una determinada ciudad española la temperatura máxima durante el mes de junio se distribuye como una normal con media 23° y desviación típica 5° . Calcule el número de días del mes en los que se espera que la temperatura esté comprendida entre 21° y 27° .

OPCIÓN B

1 – (3 puntos) Un economista trabaja en una empresa de lunes a viernes de 9 a 13 horas. Por las tardes colabora en una asesoría los lunes y los miércoles de 16 a 19 horas, e imparte clases en una academia los martes y los jueves de 17 a 19 horas.

a) Planificar matricialmente las horas de trabajo semanales diferenciando por días y trabajos.

b) Le pagan a 15€ las horas que trabaja en la empresa, a 20€ las horas que trabaja en la asesoría y a 25€ las horas que imparte clases en la academia. Expresar matricialmente los ingresos diarios.

2 – (2 puntos) Una compañía tecnológica predice los beneficios futuros mediante la función

$$B(t) = \frac{4t^2}{t^2+2} - 3, \text{ en millones de euros.}$$

a) ¿Cuál es el beneficio en los años 1 y 5? ¿En qué momento deja de tener pérdidas la compañía?

b) ¿Hacia qué valor tiende el beneficio?

3 – (2 puntos) Encontrar la función cuya segunda derivada es $4x$, y cuya gráfica presenta un máximo en el punto (1, 2).

4 – (3 puntos) Un club deportivo va a presentarse a una competición en la que se clasificará para la siguiente fase si la puntuación media obtenida por los deportistas es superior a 24 puntos. La distribución de los puntos obtenidos por los equipos sigue una distribución normal de media 25 con una desviación típica de 5 puntos. Los equipos pueden estar formados por 15 o 25 deportistas. ¿Qué tamaño de equipo llevará el entrenador a la competición? Justifica la respuesta.

Instrucciones

- La duración total de la prueba es de 90 minutos.
- Se permite el uso de calculadoras no programables ni gráficas.
- No se permite el uso de ordenadores personales ni aparatos electrónicos de comunicación.
- La prueba consta de dos partes: dos problemas y diez preguntas de test.
- La parte de preguntas de test se responderá en la hoja de respuestas que acompaña al enunciado.
- La parte de problemas se responderá en hojas aparte.
- Ambas partes se cumplimentarán con bolígrafo y se entregarán simultáneamente.

Criterios de evaluación

- Cada problema se puntúa entre 0 y 2,5 puntos.
- Cada pregunta de test puntúa de la forma siguiente:
 - Una respuesta correcta suma 0,5 puntos.
 - Una respuesta incorrecta, en blanco o con más de una marca ni suma ni resta, es decir, se valora con cero puntos.
 - La parte de preguntas de test se valora entre 0 y 5 puntos.

Nota: en el curso 2016/2017 excepcionalmente no se aplicará la penalización por fallos en las respuestas tipo test de aquellos exámenes que contengan un bloque de preguntas objetivas

Problemas

Problema 1 (2,5 puntos)

Se desea recargar el cajero de un banco con billetes de 10, 20 y 50 euros. Por cada 5 billetes de 50 se ha de introducir 1 de 20, mientras que por cada 2 billetes de 20 se han de introducir 3 de 10.

- Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la proporción de cada una de las denominaciones de billetes que hay que introducir en el cajero.
- Resolver el sistema mediante la regla de Cramer.
- Si el importe total en euros de todos los billetes ha de ser 28500 euros ¿cuánto billetes de cada denominación hay que introducir en el cajero?

Problema 2 (2,5 puntos)

Los beneficios netos de una empresa, en millones de euros, se pueden aproximar mediante la expresión

$$f(t) = \frac{30t - 60}{5t + 7}$$

donde $t > 0$ representa los años de vida de la empresa.

- Explicar razonadamente a partir de qué año la empresa obtiene beneficios netos no negativos.
- ¿Pueden crecer indefinidamente los beneficios netos de la empresa a medida que transcurre el tiempo t ? En caso afirmativo, justificarlo formalmente. En caso negativo, determinar un valor que limite superiormente dichos beneficios netos.

Preguntas de test

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y sea A^{-1} su matriz inversa. Entonces el elemento a_{22} de la segunda fila y segunda columna de la matriz inversa A^{-1} es
- 0.
 - 1.
 - 1.

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces
- $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$
 - $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$
 - $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

3. El valor del $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3}$ es igual a
- 1.
 - 0.
 - 1/2.

4. La integral $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos(x) dx$ vale
- 0.
 - 1.
 - 2.

5. El vector director de la recta

$$r \equiv x = 2t + 1, \quad y = 3t - 1, \quad z = t - 7$$

es el vector

- (1,-1,-7).
- (2,3,1).
- (3,2,-6).

6. Los planos

$$\alpha \equiv x + y - 5z = -4$$

$$\beta \equiv -3x - 3y + 15z = 1$$

- se cortan en una recta.
- son paralelos.
- son coincidentes.

7. La distancia del punto $A = (1, 2, 5)$ al plano

$$\alpha \equiv 2x + 2y - z - 5 = 0$$

vale

- 5/3.
- 2/3.
- 4/3.

8. Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, la afirmación $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ es correcta

- si A y B son sucesos disjuntos.
- si A y B son sucesos independientes.
- para cualquier par de sucesos A y B .

9. Si A y B son sucesos tales que $P(A) = 0,3$ y $P(B|A) = 0,45$, entonces $P(A \cap B)$ vale

- 0,135.
- 0,15.
- 0,25.

10. Una población está compuesta en un 60% de mujeres. El 14% de las mujeres y el 22% de los hombres son fumadores. Si una persona elegida al azar fuma, la probabilidad de que sea una mujer es

- 0,342.
- 0,488.
- 0,556.

NOTAS ACLARATORIAS: El examen consta de dos partes, una de desarrollo y otra de tipo test. Las respuestas correctas del test se puntúan con 0'5 puntos. No se penaliza por preguntas en blanco o incorrectas. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

PROBLEMA 1

(2'5 puntos) Dado el problema de programación lineal: maximizar $z = 3x + 5y$

$$\text{con las restricciones } \begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + y \geq -2 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

- Represente la región factible.
- ¿En qué punto se alcanza el máximo y cuánto vale?

PROBLEMA 2

(2'5 puntos) La variación, en céntimos de euro, de la cotización bursátil de las acciones de una empresa sigue la función $V(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$, en la sesión del día entre las 09:00 y las 17:00 horas ($0 \leq t \leq 8$).

- ¿Cuál ha sido la variación al cerrar la sesión? ¿Cuál ha sido la cotización final sabiendo que ayer cotizaba a 30€?
- Hallar los intervalos horarios en que la variación ha crecido y aquellos en que ha decrecido, así como los extremos relativos, y la variación en esos momentos.

CUESTIONES

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ el producto $A \times B$ es igual a:

- $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
- 9
- $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Determinar si los valores $x = 2$ y $x = 0$ son soluciones de la inecuación $\frac{3x+2}{x-1} \geq \frac{x-4}{7+2x}$

- Ambos valores son solución de la inecuación.
- Ninguno de los dos valores es solución.
- $x = 2$ es solución y $x = 0$ no es solución.

3. Una entidad bancaria predice los beneficios futuros, en miles de millones de euros, mediante la función

$$B(t) = \frac{5t}{t+3} - 2$$

donde t son los años ¿Hacia qué valor tiende el beneficio?

- 5000 millones de euros.
- Con la información suministrada no se puede saber.
- 3000 millones de euros.

4. Calcular la derivada de la función $f(x) = 1/x^4$

a) $-\frac{4}{x^5}$

b) $\frac{1}{4x^3}$

c) No se puede calcular la derivada de la función

5. Se tiran dos dados y la suma es 6, ¿cuál es la probabilidad de que al menos haya salido un 1?

a) Nunca puede salir un 1

c) $2/5$

b) $1/5$

6. El tiempo de espera en una atracción de feria es una variable aleatoria normal de media 10 minutos y desviación típica 2 minutos. ¿Cuál es la distribución de la media muestral, al tomar muestras aleatorias de 64 clientes?

a) No es posible determinar la distribución de la media muestral

b) $N(10; 2)$

c) $N(10; 0,25)$

7. El tiempo de vida de unos motores industriales se distribuyen normalmente con una desviación típica de 2000 horas. Calcular el tamaño mínimo de la muestra, si se admite un error máximo de 500 horas con un grado de confianza del 95%.

a) 50

b) 56

c) 62

8. En un estadio se hace una encuesta sobre la marcha del equipo local. Se pregunta a 600 aficionados y 225 contestan que la marcha no es buena. Obtener con un nivel de significación del 5% un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensan que el equipo está mal.

a) $(0,336; 0,414)$

b) $(0; 0,336)$

c) $(0,414; 0,741)$

Sean A y B dos sucesos de un espacio de sucesos S, tales que: $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Se pide:

9. Podeos afirmar que:

a) $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$

b) $P(A \cap B) = \frac{1}{15}$

c) $P(A \cap B) = \frac{11}{15}$

10. Podeos afirmar que:

a) $P(A^c \cap B^c) = \frac{14}{15}$

b) $P(A^c \cap B^c) = \frac{2}{5}$

c) $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{3}$

 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Junio - 2017	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo - Mixto	MODELO 03
Calculadora no programable				Hoja 1 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Matemáticas
Prueba de competencia específica
Curso 2016-17

Examen tipo C

Instrucciones

- El examen se presenta en español e inglés, pero debe responderse exclusivamente en español.
- La duración total del examen es de 90 minutos.
- Se permite el uso de calculadoras no programables.
- No se permite el uso de ordenadores personales ni aparatos electrónicos de comunicación.
- El examen consta de dos partes: dos problemas y diez preguntas de test.
- Las respuestas de las preguntas de test se deberán marcar en la hoja de respuestas que acompaña al enunciado.
- La parte de problemas se responderá en hojas aparte.
- Ambas partes se cumplimentarán con bolígrafo y se entregarán simultáneamente.

Criterios de evaluación

- Cada problema se puntúa entre 0 y 2,5 puntos.
- Cada pregunta de test puntúa de la forma siguiente:
 - Una respuesta correcta suma 0,5 puntos.

Guidelines

- The exam is presented in Spanish and English, but must be answered exclusively in Spanish.
- The duration of the exam is 90 minutes.
- The use of non-programmable calculator is permitted.
- The use of laptops or any other electronic communication devices is not permitted.
- The exam has two parts: two problems and ten test questions.
- The answers to the test questions should be marked on the answer sheet that accompanies the statement.
- The problem part will be answered on separate sheets.
- Both parts will be completed with pen and must be given together at the end of exam.

Evaluation criteria

- Each problem will be valued between 0 and 2.5 points.
- Each test question will be valued as follow:
 - A correct answer adds 0.5 points.

 03100825		Matemáticas (PCE)		100	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			03
		Junio - 2017	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo - Mixto	MODELO 03
Calculadora no programable				Hoja 2 de 5	

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Matemáticas
Prueba de competencia específica
Curso 2016-17

Examen tipo C

Problemas

Problema 1 (2,5 puntos)

Dada la función $f(x) = e^{\frac{(x-1)^2}{2}}$

- Calcular su dominio.
- Estudiar las asíntotas.
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Hallar los máximos y mínimos relativos.
- Determinar los puntos de inflexión.

Problema 2 (2,5 puntos)

Una bolsa contiene 6 bolas de golf, de las cuales 3 son rojas, 2 blancas y 1 amarilla. Se extraen consecutivamente 3 bolas al azar.

- Calcular la probabilidad de que la primera sea roja, la segunda sea blanca y la tercera no sea amarilla, si en cada extracción no se reponen las bolas en la bolsa.
- Calcular dicha probabilidad, si en cada extracción se reponen en la bolsa.

 03100825 Calculadora no programable	 Junio - 2017	Matemáticas (PCE)	100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	03
		Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo - Mixto MODELO 03 Hoja 3 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Matemáticas
Prueba de competencia específica
Curso 2016-17

Examen tipo C

Preguntas de test

- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz inversa A^{-1} es
 - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
 - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
 - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
- La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango
 - 1.
 - 2.
 - 3.
- Un comerciante compra un artículo por 1 euro. Si desea obtener una ganancia igual al 20% del precio de venta, entonces el precio al que debe vender el artículo es
 - 1,20 euros.
 - 1,25 euros.
 - 1,30 euros.
- El valor del $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ es igual a
 - 1.
 - $+\infty$.
 - 0.
- La integral $\int x e^{x^2} dx$ es igual a
 - $\frac{e^{x^3}}{3}$.
 - $\frac{e^{x^2}}{2}$.
 - $\frac{e^{x^4}}{4}$.
- El área de la región limitada por las funciones $y = x^2$, $y = x^3$ vale
 - $\frac{1}{4}$.
 - $\frac{1}{3}$.
 - $\frac{1}{12}$.
- Dados los puntos $A(2,0,0)$, $B(1,-2,0)$, $C(0,1,2)$. El punto $D(x,y,z)$ para que $\vec{AB}$ sea equipolente a $\vec{CD}$ es
 - $(1,3,2)$.
 - $(1,-1,2)$.
 - $(-1,-1,2)$.
- La recta que pasa por el punto $A(1,3,5)$ y es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (0,2,3)$ y $\vec{v} = (1,4,0)$ es
 - $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-12}$
 - $\frac{x-1}{-12} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-2}$
 - $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{-12}$
- La ecuación del plano que contiene a los puntos $A(2,0,1)$, $B(1,1,2)$ y $C(3,1,0)$ es
 - $x + z = 3$.
 - $x - z = 6$.
 - $x + z = 2$.
- Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, siempre se verifica
 - $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
 - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
	Junio - 2017	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo - Mixto	MODELO 03
Calculadora no programable				Hoja 4 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Mathematics
Specific Competency Exam
Year 2016-17

Exam Type C

Problems

Problem 1 (2,5 points)

Given the function $f(x) = e^{\frac{(x-1)^2}{2}}$

- Calculate your domain.
- Study the asymptotes.
- Determine the increase and decrease intervals.
- Find the relative maximums and minimums.
- Determine the turning points.

Problem 2 (2,5 points)

A bag contains 6 golf balls, of which 3 are red, 2 white and 1 yellow. 3 random balls are extracted consecutively.

- Calculate the probability that the first one is red, the second is white and the third is not yellow, if in each extraction the balls are not replenished in the bag.
- Calculate this probability, if in each extraction they are replenished in the bag.



03100825



Matemáticas (PCE)

100

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

03

Junio - 2017

Duración: 90 min.

EXAMEN: Tipo -
Mixto

MODELO 03

Calculadora no programable

Hoja 5 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Mathematics
Specific Competency Exam
Year 2016-17

Exam Type C

Test Questions

- Given the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Then the inverse matrix A^{-1} is
 - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
 - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
 - $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$
- The matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ has rank
 - 1.
 - 2.
 - 3.
- A merchant buys an article for 1 euro. If he wants to make a profit equal to 20% of the sales price, then the price at which the article is to be sold is
 - 1,20 euros.
 - 1,25 euros.
 - 1,30 euros.
- The value of $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ is equal to
 - 1.
 - $+\infty$.
 - 0.
- The integral $\int x e^{x^2} dx$ is equal to
 - $\frac{e^{x^2}}{3}$.
 - $\frac{e^{x^2}}{2}$.
 - $\frac{e^{x^2}}{4}$.
- The area of the region limited by functions $y = x^2$, $y = x^3$ is equal to
 - $\frac{1}{4}$.
 - $\frac{1}{3}$.
 - $\frac{1}{12}$.
- Given the points $A(2,0,0)$, $B(1,-2,0)$ and $C(0,1,2)$. The point $D(x,y,z)$ for that $\vec{AB}$ be equi-pollent to $\vec{CD}$ is
 - $(1,3,2)$.
 - $(1,-1,2)$.
 - $(-1,-1,2)$.
- The line passing through the point $A(1,3,5)$ and is perpendicular to the vectors $\vec{u} = (0,2,3)$ and $\vec{v} = (1,4,0)$ is
 - $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-12}$
 - $\frac{x-1}{-12} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-2}$
 - $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{-12}$
- The equation of the plane containing the points $A(2,0,1)$, $B(1,1,2)$ and $C(3,1,0)$ is
 - $x+z=3$.
 - $x-z=6$.
 - $x+z=2$.
- If A and B are events of a probability space, it is always verified
 - $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
 - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

 03100825	 Septiembre - 2017	Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
		Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo L Mixto	MODELO 12
Calculadora no programable				Hoja 1 de 5

Matemáticas
Prueba de competencia específica
Curso 2016-17

Examen tipo L

Instrucciones

- El examen se presenta en español e inglés, pero debe responderse exclusivamente en español.
- La duración total del examen es de 90 minutos.
- Se permite el uso de calculadoras no programables.
- No se permite el uso de ordenadores personales ni aparatos electrónicos de comunicación.
- El examen consta de dos partes: dos problemas y diez preguntas de test.
- Las respuestas de las preguntas de test se deberán marcar en la hoja de respuestas que acompaña al enunciado.
- La parte de problemas se responderá en hojas aparte.
- Ambas partes se cumplimentarán con bolígrafo y se entregarán simultáneamente.

Criterios de evaluación

- Cada problema se puntúa entre 0 y 2,5 puntos.
- Cada pregunta de test puntúa de la forma siguiente:
 - Una respuesta correcta suma 0,5 puntos.

Guidelines

- The exam is presented in Spanish and English, but must be answered exclusively in Spanish.
- The duration of the exam is 90 minutes.
- The use of non-programmable calculator is permitted.
- The use of laptops or any other electronic communication devices is not permitted.
- The exam has two parts: two problems and ten test questions.
- The answers to the test questions should be marked on the answer sheet that accompanies the statement.
- The problem part will be answered on separate sheets.
- Both parts will be completed with pen and must be given together at the end of exam.

Evaluation criteria

- Each problem will be valued between 0 and 2.5 points.
- Each test question will be valued as follow:
 - A correct answer adds 0.5 points.

 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Septiembre - 2017	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo L Mixto	MODELO 12
Calculadora no programable				Hoja 2 de 5

Matemáticas
Prueba de competencia específica
Curso 2016-17

Examen tipo L

Problemas

Problema 1 (2,5 puntos)

Se han comprado tres productos A , B y C . Sin tener en cuenta el IVA, el producto C vale 360 euros menos que la suma de lo que cuestan A y B conjuntamente, mientras que el importe total de los tres productos asciende a 800 euros. El producto A paga un IVA del 6%, el producto B del 12% y el producto C del 30%. La factura total con IVA importa 917,60 euros.

- Plantear un sistema de ecuaciones para calcular la cantidad, sin IVA, que cuesta cada producto.
- Resolver el sistema por el método de Cramer.

Problema 2 (2,5 puntos)

Se desea construir una ventana rectangular rematada en la parte superior por un triángulo equilátero, tal como se muestra en la figura. El perímetro total de la ventana completa ha de ser 9 m. ¿Qué tamaño tiene que tener la base de la ventana para que su superficie sea máxima?



base ventana



03100825



Matemáticas (PCE)

100

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

03

Septiembre - 2017

Duración: 90 min.

EXAMEN: Tipo L
Mixto

MODELO 12

Calculadora no programable

Hoja 3 de 5

Matemáticas
Prueba de competencia específica
Curso 2016-17

Examen tipo L

Preguntas de test

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz inversa A^{-1} es

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La segunda fila de la matriz producto $A \cdot B$ es

a) $(-1 \ 6)$.

b) $(-1 \ 3)$.

c) $(-1 \ 4)$.

3. El valor del $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$ es igual a

a) 0.

b) -1.

c) -2.

4. La integral $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$, donde $\ln$ es el logaritmo neperiano, es igual a

a) $\ln(1+e)$.

b) $\ln(\frac{e}{2})$.

c) $\ln(\frac{1+e}{2})$.

5. El área limitada por la curva $y = 2x^2 + 5x - 3$, y la recta $y = 3x + 1$ vale

a) 9.

b) 18.

c) 27.

6. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,2,1)$ y $B(4,1,5)$ es

a) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$.

b) $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 4x - z - 11 = 0 \end{cases}$

c) $(x,y,z) = (3,2,1) + t(4,1,5)$.

7. Los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv -2x - 3y + 4z - 6 = 0 \\ \pi_2 \equiv 4x + 6y - 8z - 5 = 0 \end{cases}$ son

a) secantes.

b) paralelos.

c) coincidentes.

8. La distancia del punto $A(1,3,0)$ al plano $\pi \equiv 4x - y + 3z - 2 = 0$ vale

a) $\frac{1}{\sqrt{26}}$.

b) $\frac{3}{\sqrt{26}}$.

c) $\frac{4}{\sqrt{26}}$.

9. Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, entonces $P(B|A)$ es igual a

a) $1/3$.

b) $1/6$.

c) $1/2$.

10. Regularmente, el 37% de la población va al cine, el 11% al teatro y el 6% a ambas cosas. La proporción de personas que asisten regularmente a uno u otro tipo de espectáculo es

a) 0,42.

b) 0,48.

c) 0,54.

 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
Septiembre - 2017	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo L Mixto	MODELO 12	
Calculadora no programable				Hoja 4 de 5

Mathematics
Specific Competency Exam
Year 2016-17

Exam Type L

Problems

Problem 1 (2,5 points)

Three products have been purchased A , B y C . Without taking into account the VAT, the product C is 360 euros less than the sum of what they cost A and B together, while the total amount of the three products amounts to 800 euros. The product A pays 6% of VAT, the product B of 12% and the product C of 30%. The total invoice with VAT imports 917.60 euros.

- Propose a system of equations to calculate the amount, without VAT, that each product costs.
- Solve the system by the Cramer method.

Problem 2 (2,5 points)

It is desired to construct a rectangular window topped by an equilateral triangle, as shown in the figure. The total perimeter of the complete window must be 9 m. What size does the base of the window have to be so that its surface is maximum?



base window



03100825



Matemáticas (PCE)

100

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

03

Septiembre - 2017

Duración: 90 min.

EXAMEN: Tipo L
Mixto

MODELO 12

Calculadora no programable

Hoja 5 de 5

Mathematics
Specific Competency Exam
Year 2016-17

Exam Type L

Test Questions

1. Given the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Then the inverse matrix A^{-1} is

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Are considered the matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

The second row of the product matrix $A \cdot B$ is

a) $(-1 \ 6)$.

b) $(-1 \ 3)$.

c) $(-1 \ 4)$.

3. The value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$ is equal to

a) 0.

b) -1.

c) -2.

4. The integral $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$, where $\ln$ is the logarithm neperian, is equal to

a) $\ln(1+e)$.

b) $\ln(\frac{e}{2})$.

c) $\ln(\frac{1+e}{2})$.

5. The area limited by the curve $y = 2x^2 + 5x - 3$, and the straight line $y = 3x + 1$ is equal to

a) 9.

b) 18.

c) 27.

6. The equation of the line passing through points $A(3,2,1)$ and $B(4,1,5)$ is

a) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$.

b) $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 4x - z - 11 = 0 \end{cases}$

c) $(x,y,z) = (3,2,1) + t(4,1,5)$.

7. The planes $\begin{cases} \pi_1 \equiv -2x - 3y + 4z - 6 = 0 \\ \pi_2 \equiv 4x + 6y - 8z - 5 = 0 \end{cases}$ are

a) secants.

b) parallels.

c) coincident.

8. The distance from the point $A(1,3,0)$ to the plane $\pi \equiv 4x - y + 3z - 2 = 0$ is worth

a) $\frac{1}{\sqrt{26}}$.

b) $\frac{3}{\sqrt{26}}$.

c) $\frac{4}{\sqrt{26}}$.

9. If A and B are events of a probability space, $P(A) = \frac{1}{3}$ and $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, then $P(B|A)$ is equal to

a) $1/3$.

b) $1/6$.

c) $1/2$.

10. Regularly, the 37% of the population goes to the cinema, 11% to the theater and 6% a both. The proportion of people who regularly attend one or other type of show is

a) 0,42.

b) 0,48.

c) 0,54.

 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
Junio - 2018	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto	MODELO 01	
Material: Calculadora no programable				Hoja 1 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

INSTRUCCIONES

- El enunciado de la prueba se proporciona en inglés y español. La contestación al examen ha de ser únicamente en español.
- La duración total de la prueba es de 90 minutos.
- Se permite el uso de calculadora no programable ni con capacidades gráficas.
- No está permitido el uso de ordenadores, tablets ni ningún tipo de material electrónico o aparatos de comunicación.
- La prueba consta de dos partes:
 1. Diez preguntas tipo test, cada una con tres opciones de las que sólo una es correcta.
 2. Dos problemas de desarrollo.
- Las preguntas de test deben de contestarse en la hoja de respuestas que se adjunta.
- La parte de problemas se contestará en hojas aparte.
- Las dos partes de la prueba se contestarán con bolígrafo y se entregarán conjuntamente.

PUNTUACIÓN

- Cada problema se puntúa de 0 a 2,5 puntos.
- Cada pregunta del test se puntúa de la forma siguiente:
 - La respuesta correcta suma 0,5 puntos.
 - La respuesta incorrecta resta 0,15 puntos.
 - La respuesta en blanco o con más de una marca se valora con cero puntos.

INSTRUCTIONS

- The exam statements appear both in English and Spanish but it has to be answered exclusively in Spanish.
- The duration of the exam is of 90 minutes.
- The only calculators allowed are those non-programable or with graphic capabilities.
- The use of computers, tablets or any type of electronic material or communication devices is not permitted.
- This proof consists on two parts:
 1. Ten test questions, each with three options where only one of them is correct.
 2. Two problems to answer by explaining the reasoning done.
- The answers to the test questions should be marked on the sheet provided for this purpose.
- The problems should be answered in separated sheets.
- Boths parts of the proof should be completed with a pen. The sheets with the answers must be delivered together.

SCORE

- Each problem is scored between 0 and 2.5 points.
- Each test question is scored as follows:
 - The correct answer adds 0.5 points.
 - La respuesta incorrecta resta 0.15 puntos.
 - La respuesta en blanco o con más de una marca se valora con cero puntos.



03100825



Matemáticas (PCE)

100

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

03

Junio - 2018

Duración: 90 min.

EXAMEN: Tipo A
Mixto

MODELO 01

Material: Calculadora no programable

Hoja 2 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

PREGUNTAS DEL TEST

Modelo 1-A

1. El valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\log(1+x^2)}$$

(donde $\log$ significa logaritmo neperiano), es:

- a) 1. b) π . c) $\pi/2$.

2. El rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ es:}$$

- a) 1. b) 2. c) 3.

3. El conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

define:

- a) Un punto en el espacio.
b) Una recta en el espacio.
c) Un plano en el espacio.

4. El coseno del ángulo θ formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, determinados por los puntos $A(2, 1, 0)$, $B(3, 0, 0)$ y $C(4, 1, 2)$, es:

- a) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
b) $\cos \theta = \frac{1}{2}$.
c) $\cos \theta = 0$.

5. Las rectas:

$$r_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$$

$$r_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{1} = \frac{z-2}{2}$$

se cortan en un punto para el valor de k :

- a) $k = 0$. b) $k = 1$. c) $k = 2$.

6. El área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P = (1, 2, -3)$, $Q = (-2, 1, 0)$ y $O = (0, 0, 0)$ es:

- a) $\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{2}}$. b) $\frac{70}{\sqrt{2}}$. c) $\frac{\sqrt{70}}{2}$.

7. La función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

corta al eje X en:

- a) Un único punto.
b) Dos únicos puntos.
c) Tres puntos.

8. La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

tiene como asíntota la recta:

- a) $x = 3$.
b) $y = x + 2$.
c) $y = -x + 2$.

9. La integral

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen} x \, dx$$

vale:

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. b) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. c) 0.

10. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral E , donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ denotan los sucesos contrarios. Tenemos asignada una probabilidad en E de modo que $P(A \cap B) = 1/9$ y $P(A \cap \overline{B}) = 2/9$, entonces:

- a) $P(B|A) = 1/3$.
b) $P(B|A) = 2/81$.
c) $P(B|A) = 1/9$.

 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
Junio - 2018	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto	MODELO 01	
Material: Calculadora no programable				Hoja 3 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

PROBLEMAS

Modelo 1-A

1. Estudiar la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : mx + z = 1$$

$$\pi_2 : my - z = 0$$

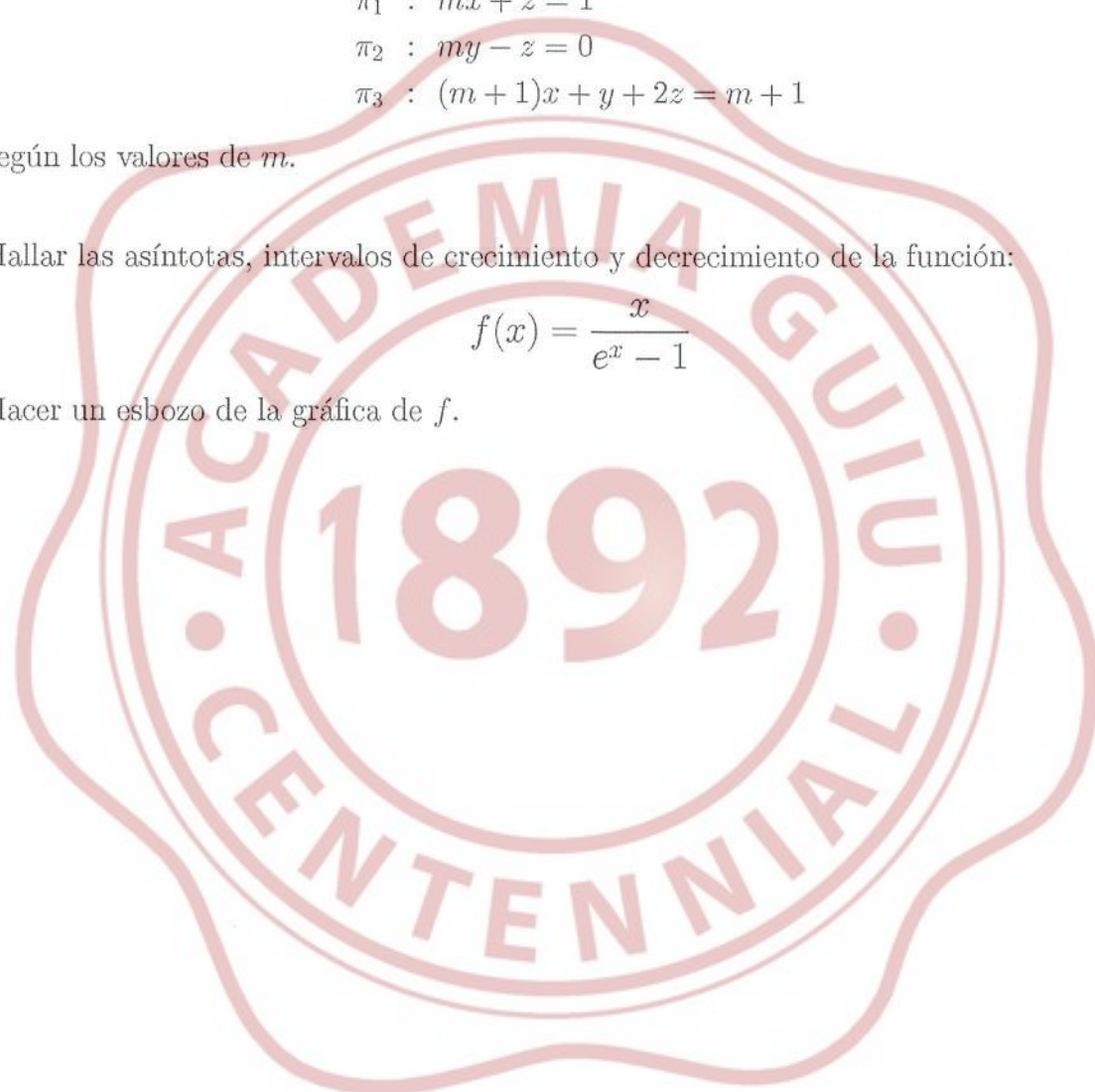
$$\pi_3 : (m + 1)x + y + 2z = m + 1$$

según los valores de m .

2. Hallar las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Hacer un esbozo de la gráfica de f .





03100825



Matemáticas (PCE)

100

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

03

Junio - 2018

Duración: 90 min.

EXAMEN: Tipo A
Mixto

MODELO 01

Material: Calculadora no programable

Hoja 4 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

TEST QUESTIONS

Modelo 1-A

1. The limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\log(1+x^2)}$$

(where $\log$ means Neperian logarithm),
is:

- a) 1. b)
- π
- . c)
- $\pi/2$
- .

2. The rank of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ is:}$$

- a) 1. b) 2. c) 3.

3. The set of solutions to the linear system

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

defines:

- a) One point in the space.
-
- b) A line in the space.
-
- c) a plane in the space.

4. The cosine of the angle θ between the vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$, defined by the points $A(2, 1, 0)$, $B(3, 0, 0)$ and $C(4, 1, 2)$ is:

- a)
- $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- .
-
- b)
- $\cos \theta = \frac{1}{2}$
- .
-
- c)
- $\cos \theta = 0$
- .

5. The lines:

$$r_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$$

$$r_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{1} = \frac{z-2}{2}$$

intersect in one point for the value of k :

- a)
- $k = 0$
- . b)
- $k = 1$
- . c)
- $k = 2$
- .

6. The area of the triangle having as vertices the points $P(1, 2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$ y $O(0, 0, 0)$ is:

- a)
- $\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{2}}$
- . b)
- $\frac{70}{\sqrt{2}}$
- . c)
- $\frac{\sqrt{70}}{2}$
- .

7. The function

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

intersects the OX axis in:

- a) Exactly one point.
-
- b) Exactly two points.
-
- c) Three points.

8. The graph of the function

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

has as asymptote the line:

- a)
- $x = 3$
- .
-
- b)
- $y = x + 2$
- .
-
- c)
- $y = -x + 2$
- .

9. The value of

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen} x \, dx$$

is:

- a)
- $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$
- . b)
- $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$
- . c) 0.

10. Let A and B be two events in a sample space E , where $\overline{A}$ and $\overline{B}$ denote the complementary events. E is assigned a probability such that $P(A \cap B) = 1/9$ and $P(A \cap \overline{B}) = 2/9$, then:

- a)
- $P(B|A) = 1/3$
- .
-
- b)
- $P(B|A) = 2/81$
- .
-
- c)
- $P(B|A) = 1/9$
- .

 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
	Junio - 2018	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto	MODELO 01
Material: Calculadora no programable				Hoja 5 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

PROBLEMS

Modelo 1-A

1. Study the relative position of the three planes below

$$\pi_1 : mx + z = 1$$

$$\pi_2 : my - z = 0$$

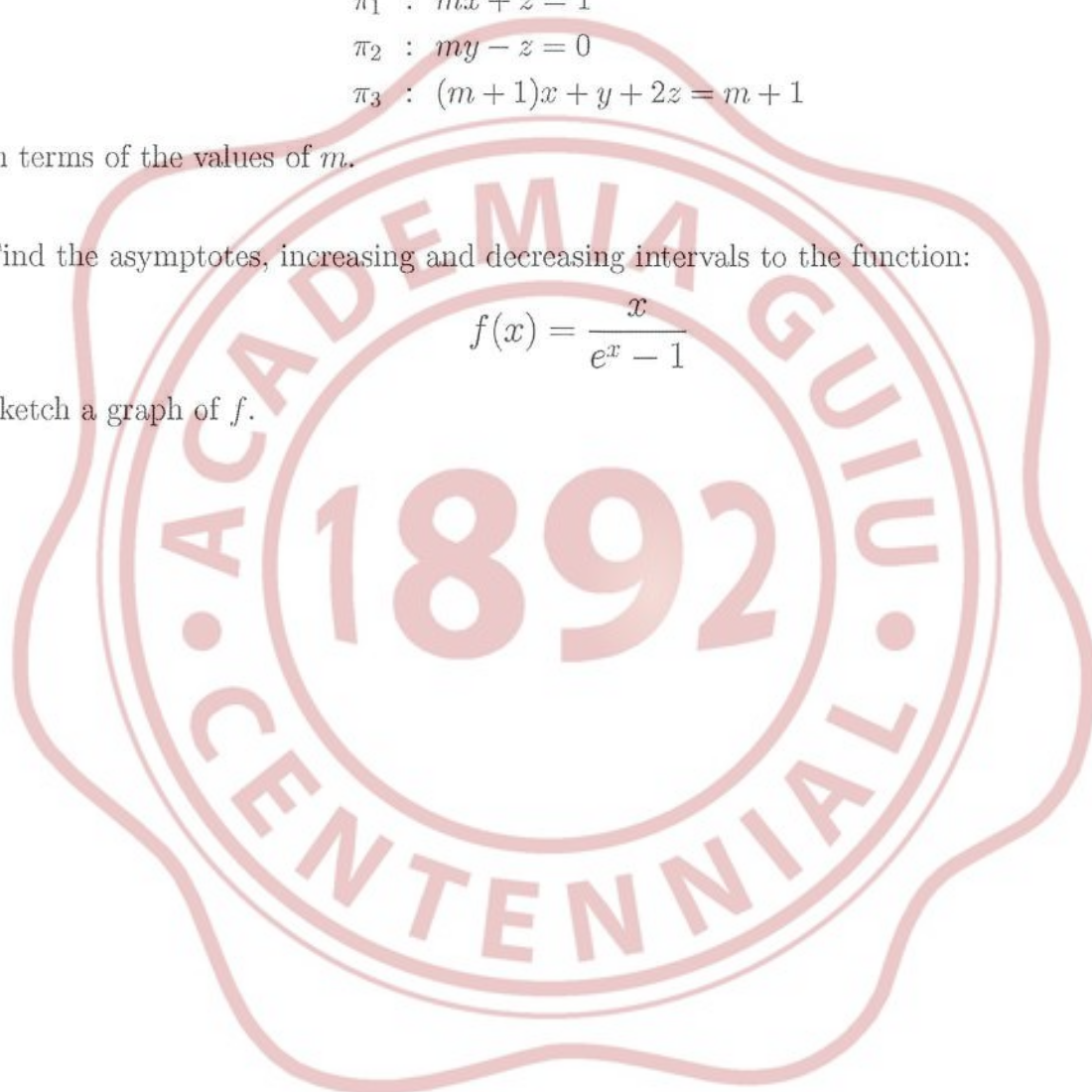
$$\pi_3 : (m+1)x + y + 2z = m+1$$

in terms of the values of m .

2. Find the asymptotes, increasing and decreasing intervals to the function:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Sketch a graph of f .



 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
	Septiembre - 2018	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto	MODELO 12
Material: Calculadora no programable				Hoja 1 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

INSTRUCCIONES

- El enunciado de la prueba se proporciona en inglés y español. La contestación al examen ha de ser únicamente en español.
- La duración total de la prueba es de 90 minutos.
- Se permite el uso de calculadora no programable ni con capacidades gráficas.
- No está permitido el uso de ordenadores, tablets ni ningún tipo de material electrónico o aparatos de comunicación.
- La prueba consta de dos partes:
 1. Diez preguntas tipo test, cada una con tres opciones de las que sólo una es correcta.
 2. Dos problemas de desarrollo.
- Las preguntas de test deben de contestarse en la hoja de respuestas que se adjunta.
- La parte de problemas se contestará en hojas aparte.
- Las dos partes de la prueba se contestarán con bolígrafo y se entregarán conjuntamente.

PUNTUACIÓN

- Cada problema se puntúa de 0 a 2,5 puntos.
- Cada pregunta del test se puntúa de la forma siguiente:
 - La respuesta correcta suma 0,5 puntos.
 - La respuesta incorrecta resta 0,15 puntos.
 - La respuesta en blanco o con más de una marca se valora con cero puntos.

INSTRUCTIONS

- The exam statements appear both in English and Spanish but it has to be answered exclusively in Spanish.
- The duration of the exam is of 90 minutes.
- The only calculators allowed are those non-programable or with graphic capabilities.
- The use of computers, tablets or any type of electronic material or communication devices is not permitted.
- This proof consists on two parts:
 1. Ten test questions, each with three options where only one of them is correct.
 2. Two problems to answer by explaining the reasoning done.
- The answers to the test questions should be marked on the sheet provided for this purpose.
- The problems should be answered in separated sheets.
- Boths parts of the proof should be completed with a pen. The sheets with the answers must be delivered together.

SCORE

- Each problem is scored between 0 and 2.5 points.
- Each test question is scored as follows:
 - The correct answer adds 0.5 points.
 - The wrong answer subtracts 0.15 points.
 - The lack of answer and answers with more than one mark are valued with zero points.



03100825



Matemáticas (PCE)

100

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

03

Septiembre - 2018

Duración: 90 min.

EXAMEN: Tipo A
Mixto

MODELO 12

Material: Calculadora no programable

Hoja 2 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

PREGUNTAS DEL TEST

Modelo 12 - A

1. El valor de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x - 1} - x)$$

es:

a) -1.

b) -5/2.

c) -5.

b) Tiene un mínimo en $x = -1$.

c) No tiene máximos ni mínimos.

2. Si el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$$

entonces el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 2a & 7b \\ 2c & 7d \end{vmatrix}$$

es:

a) 10.

b) 35.

c) 70.

es:

a) $21/\sqrt{31}$.b) $21/\sqrt{34}$.c) $20/\sqrt{34}$.3. El volumen V del paralelepípedo definido por los vectores $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 7)$ y $\mathbf{w} = (0, -1, 4)$ es:a) $V = 19$. b) $V = 29$. c) $V = 37$.

tiene como asíntota la recta:

a) $x = 0$.b) $y = x$.c) $x = 1$.4. Consideremos los vectores $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ y $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$, entonces su producto vectorial es:a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-1, 0, 0)$.b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, -1, 0)$.c) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 1, 0)$.9. El área $A(R)$ de la región R limitada por la curva

$$y = x^3 + 2$$

y las rectas $x = -1$ y $x = 1$, es:a) $A(R) = 4$.b) $A(R) = 5$.c) $A(R) = 6$.

5. Un vector en la dirección de la recta

$$r: \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

es:

a) $\mathbf{d} = (2, 1, 1)$.b) $\mathbf{d} = (-2, 1, 1)$.c) $\mathbf{d} = (2, -1, 1)$.10. Dado el espacio muestral $E = \{a, b, c, d, e\}$ y las probabilidades

$$P(\{a, b, c\}) = 7/10$$

$$P(\{b, c, d\}) = 3/10$$

$$P(\{b, c\}) = 2/10$$

La probabilidad del suceso $\{a, b, c, d\}$ es:a) $P(\{a, b, c, d\}) = 4/5$.b) $P(\{a, b, c, d\}) = 4/8$.c) $P(\{a, b, c, d\}) = 2/3$.

6. La función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

a) Tiene un máximo en $x = -1$.

 03100825		Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
	Septiembre - 2018	Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto	MODELO 12
Material: Calculadora no programable				Hoja 3 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

PROBLEMAS

Modelo 12 - A

1. Estudiar la posición relativa de las rectas

$$r_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}$$

$$r_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-m}{1} = \frac{z-2}{2}$$

según los valores de m .

2. Los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(2, 5, 6)$, $C(1, 3, 5)$ y $D(2, 6, 8)$ definen un paralelogramo en el espacio tridimensional.
- Hallar la ecuación del plano que definen A , B , C y D .
 - Calcular el área del paralelogramo que determinan.





03100825



Matemáticas (PCE)

100

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

03

Septiembre - 2018

Duración: 90 min.

EXAMEN: Tipo A
Mixto

MODELO 12

Material: Calculadora no programable

Hoja 4 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

TEST QUESTIONS

Modelo 12 - A

1. The value of

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x - 1} - x)$$

is:

- a) -1. b) -5/2. c) -5.

2. Assuming the value of the following determinant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$$

then the value of

$$\begin{vmatrix} 2a & 7b \\ 2c & 7d \end{vmatrix}$$

is:

- a) 10. b) 35. c) 70.

3. The volume V of the parallelepiped defined by the vectors $\mathbf{u} = (-3, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 7)$ and $\mathbf{w} = (0, -1, 4)$ is:

- a) $V = 19$. b) $V = 29$. c) $V = 37$.

4. Consider the vectors $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$ and $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$, then their cross product is:

- a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-1, 0, 0)$.
b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, -1, 0)$.
c) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 1, 0)$.

5. One vector in the direction of the line

$$r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

is:

- a) $\mathbf{d} = (2, 1, 1)$.
b) $\mathbf{d} = (-2, 1, 1)$.
c) $\mathbf{d} = (2, -1, 1)$.

6. The function:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

- a) Has a maximum at $x = -1$.

b) Has a minimum at $x = -1$.

c) Has neither maxima nor minima.

7. La distancia del punto $P(2, 3)$ a la recta de ecuación:

$$5x - 3y + 20 = 0$$

es:

- a) $21/\sqrt{31}$.
b) $21/\sqrt{34}$.
c) $20/\sqrt{34}$.

8. The function

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

has as asymptote the line:

- a) $x = 0$.
b) $y = x$.
c) $x = 1$.

9. The area $A(R)$ of the region R limited by the curve

$$y = x^3 + 2$$

and the lines $x = -1$ and $x = 1$, is:

- a) $A(R) = 4$.
b) $A(R) = 5$.
c) $A(R) = 6$.

10. Given the sample space $E = \{a, b, c, d, e\}$ and probabilities

$$P(\{a, b, c\}) = 7/10$$

$$P(\{b, c, d\}) = 3/10$$

$$P(\{b, c\}) = 2/10$$

The probability of the event $\{a, b, c, d\}$ is:

- a) $P(\{a, b, c, d\}) = 4/5$.
b) $P(\{a, b, c, d\}) = 4/8$.
c) $P(\{a, b, c, d\}) = 2/3$.

 03100825	 Septiembre - 2018	Matemáticas (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
		Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto	MODELO 12
Material: Calculadora no programable				Hoja 5 de 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

PROBLEMS

Modelo 12 - A

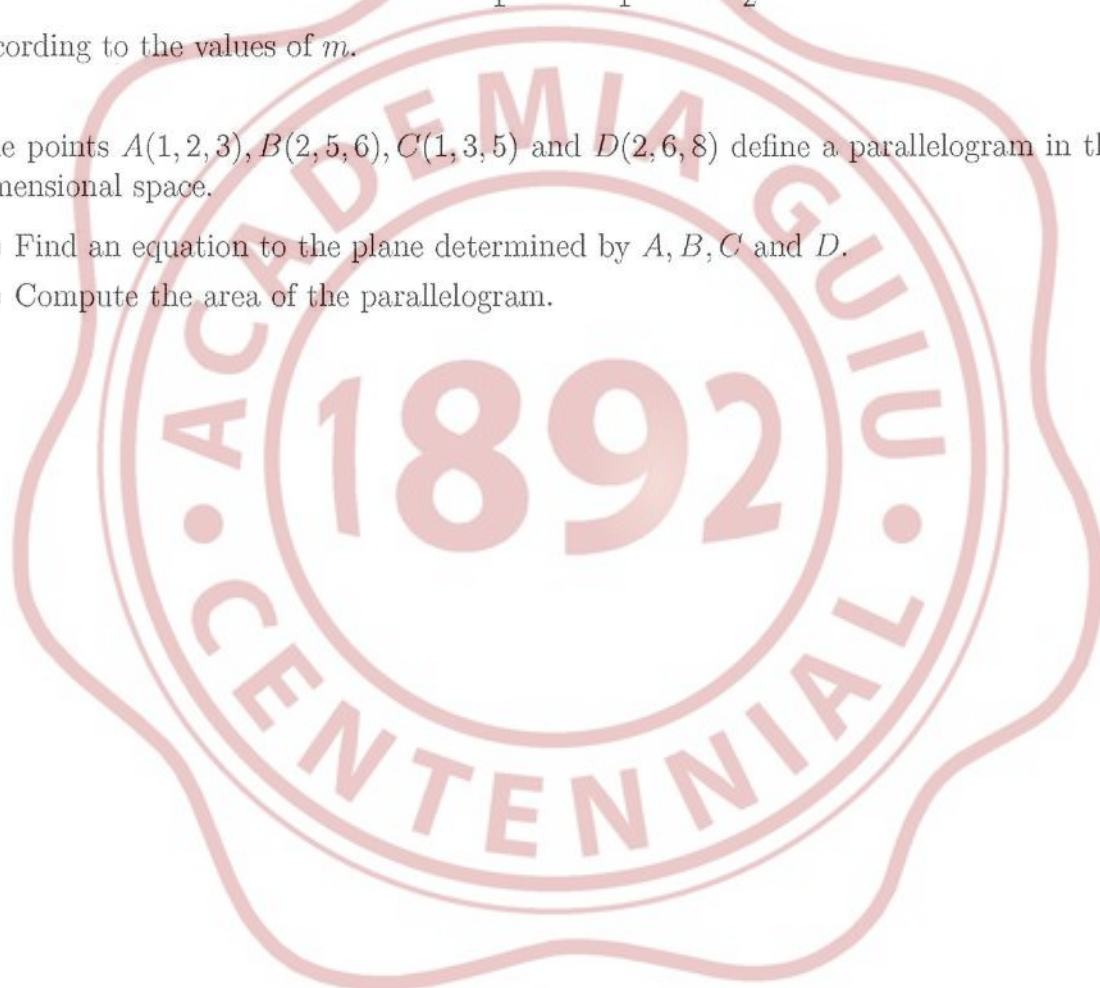
1. Discuss the relative positions of the following lines

$$r_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}$$

$$r_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-m}{1} = \frac{z-2}{2}$$

according to the values of m .

2. The points $A(1, 2, 3)$, $B(2, 5, 6)$, $C(1, 3, 5)$ and $D(2, 6, 8)$ define a parallelogram in the three dimensional space.
- Find an equation to the plane determined by A, B, C and D .
 - Compute the area of the parallelogram.



 03100831	 Junio - 2017	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE)	100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	03
		Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo - Mixto MODELO 05 Hoja 1 de 4

Calculadora no programable

NOTAS ACLARATORIAS: El examen consta de 10 cuestiones tipo test y 2 problemas. Cada cuestión vale 0,5 puntos y cada problema vale 2,5 puntos. Las cuestiones se encuentran traducidas al inglés al final del examen. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

CUESTIONES

1.- La traspuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) La matriz A no tiene traspuesta

c) Ninguna de las anteriores

2.- La matriz identidad I cumple que

a) Los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1

b) Los elementos de la diagonal principal son 1

c) Todas las respuestas anteriores son ciertas

3.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La diferencia de las matrices A y B es

a) La matriz identidad

b) Las matrices A y B no pueden restarse

c) La matriz nula

4.- Dadas dos matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 & x & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, y sabiendo que el producto de matrices $A \times B$ es

$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor de x?

a) -2

b) 1

c) 2

5.- Dada la inecuación $2y + 3x - 3 \leq 4$. Un punto solución es:

a) (0,0)

b) (5,5)

c) (10,10)

6.- ¿Cuál es el valor del siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$, si sabemos que $f(x) = x^2 - 9$ y que $g(x) = x^2 - x - 6$?

a) 1

b) 6/5

c) El límite no existe

7.- Dada la función $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$. La función es

a) Creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$

b) Decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$

c) Ninguna de las anteriores

 03100831	 Junio - 2017	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE)		100	
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD			03
		Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo - Mixto	MODELO 05	
Calculadora no programable				Hoja 2 de 4	

8.- Hallar $\int \frac{7}{2x} dx$

- a) $\frac{7}{2x^2} + C$ **b) $\frac{7}{2} \ln(x) + C$** c) No es posible calcular la integral

9.- Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, se verifica:

- a) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
b) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ si A y B son disjuntos
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$.

10.- Una muestra aleatoria de tamaño 225 llevada a cabo entre los corredores de una maratón sigue una distribución norma. El tiempo medio resultante ha sido de 215 minutos con una desviación típica de 50. Si construimos un intervalo de confianza al 95% para el tiempo de los corredores, vendrá dado por:

- a) (215, 225) **b) (208'5, 221'52)** c) (204,25, 213'75)

PROBLEMAS

1.- (2,5 puntos). Tras analizar la cotización de una compañía en la bolsa, se estima que la variación del precio de la acción de la compañía, sigue la función $P(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$, en céntimos de euro. Si sabemos que el horario de mercado es de 09:00 a 17:00 horas ($0 \leq t \leq 8$). Se pide:

- a) ¿Cuál es la variación cuando se lleva 1 hora de mercado?. Cotización final, si ayer cotizaba a 30€/acción?
b) Hallar los extremos relativos, y la variación en esos momentos.
c) Hallar los intervalos horarios en que la variación ha crecido y aquellos en que ha decrecido

2.- (2,5 puntos). Sean A y B dos sucesos de un espacio de sucesos S, tal que

$$P(A) = 3/8, \quad P(B) = 1/2 \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = 1/4$$

Se pide:

- a) $P(A^c)$, $P(B^c)$ y $P(A^c \cup B^c)$
b) $P(A^c \cap B^c)$ y $P(A^c \cap B)$

Nota: recuerde que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

TEST

1.- The transpose of matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ is

- a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) Matrix A has no transpose c) None of the above

2.- Matrix identity I complies with

- a) The elements not belonging to the principal diagonal are all equal to 1
b) All of the elements of the principal diagonal are 1
c) All of the previous responses are certain

 03100831	 Junio - 2017	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE)	100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD	03
		Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo - Mixto MODELO 05 Hoja 3 de 4

Calculadora no programable

3.- Given the matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. The difference between the matrices A and B is

- a) Identity matrix
- b) Matrices A and B cannot be subtracted
- c) Null matrix

4.- Given two matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 0 \\ 1 & x & 2 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, and knowing that the product of matrices $A \times B$ is $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, what is the value of x ?

- a) -2
- b) 1
- c) 2

5.- Given the inequality $2y + 3x - 3 \leq 4$. One point solution is:

- a) (0,0)
- b) (5,5)
- c) (10,10)

6.- What is the value of the following limit $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$, if we know that $f(x) = x^2 - 9$ and $g(x) = x^2 - x - 6$?

- a) 1
- b) 6/5
- c) The limit does not exist

7.- Given the function $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$. The function is

- a) Increasing in the interval $(-\infty, 0)$
- b) Decreasing in the interval $(-\infty, 0)$
- c) None of the above

8.- Calculate $\int \frac{7}{2x} dx$

- a) $\frac{7}{2x^2} + C$
- b) $\frac{7}{2} \ln(x) + C$
- c) It is not possible to calculate the integral

9.- If A and B are events in a probability space, verify:

- a) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- b) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ if A and B are disconnected
- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$.

10.- A random sample with a size of 225 conducted on runners in a marathon follows a normal distribution. The mean time resulting was 215 minutes with a standard deviation of 50. If we construct a confidence interval of 95% for the runners' time, it would be given by:

- a) (215, 225)
- b) (208'5, 221'52)
- c) (204,25, 213'75)

 03100831	 Septiembre - 2017	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE) PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Duración: 90 min. EXAMEN: Tipo B Mixto	100 03 MODELO 12
Calculadora no programable			Hoja 1 de 4

NOTAS ACLARATORIAS: El examen consta de 10 cuestiones tipo test y 2 problemas. Cada cuestión vale 0,5 puntos y cada problema vale 2,5 puntos. Las cuestiones se encuentran traducidas al inglés al final del examen. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

CUESTIONES

1.- Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, la afirmación $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ es correcta:

- a) Si A y B son sucesos disjuntos
- b) Solo si A y B son sucesos independientes
- c) Para cualquier par de sucesos A y B.

2.- Una urna contiene seis bolas blancas y 4 negras. Si se extraen al azar y simultáneamente 3 bolas, la probabilidad de obtener 2 bolas blancas y una negra es

- a) 35/56
- b) 11/32
- c) 1/2

3.- Si la variable aleatoria X sigue una distribución, $N(\mu, \sigma)$ siempre podremos afirmar que la media muestra $\bar{X}$ sigue una distribución $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ y por tanto

- a) $Z = \frac{X - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$
- b) $Z = \frac{X + \mu}{\sigma}$ sigue una distribución $N(0, 1)$.
- c) $Z = \frac{X - \sigma / \sqrt{n}}{\sigma}$ sigue una distribución $N(0, 1)$.

4.- Una matriz A es nula si se cumple que

- a) La mayoría de los elementos de la matriz son 0
- b) Todos los elementos de la diagonal son 0
- c) Todos los elementos de la matriz son 0

5.- Dada la siguiente inequación $5x^2 - 5 > 15 - x$. Los puntos $x=1$ y $x=2$ son:

- a) Ambos valores son solución de la inequación
- b) Ninguno de los valores es solución de la inequación
- c) El valor $x=1$ no es solución y el valor $x=2$ es solución de la inequación

6.- La función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ presenta un discontinuidad en el punto $x=1$ de tipo

- a) Inevitable de salto infinito
- b) Inevitable de salto finito
- c) Discontinuidad evitable

7.- La función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ tiene

- a) Asíntota horizontal y asíntota vertical
- b) Asíntota vertical y asíntota oblicua
- c) Asíntota oblicua

8.- Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. El dominio de la función es

- a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) $\mathbb{R}$
- c) Ninguna de las anteriores

 03100831	 Septiembre - 2017	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE) PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Duración: 90 min. EXAMEN: Tipo B Mixto	100 03 MODELO 12
Calculadora no programable			Hoja 2 de 4

9.- Dada la función $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$. Tiene un mínimo en el punto

- a) $x = 1$ b) $x = -1$ c) No tiene mínimos

10.- Hallar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

- a) $\frac{(\ln(x))^2}{2} + C$ b) $\frac{\ln(x)}{x^2} + C$ c) Ninguna de las anteriores

PROBLEMAS

1.- (2,5 puntos). Representar la región factible dada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \leq 4 \\ x + 4y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Hallar los puntos de la región factible en los cuales estarían los posibles extremos de una función cualquiera.
b) Sabiendo que la función $Z = 4x + 2y$ representa el número de pedidos y el conjunto de inecuaciones anterior son las condiciones de los mismos, calcular si es posible, el número máximo y mínimo de pedidos que se pueden realizar.

2.- (2,5 puntos). La altura de los jugadores de baloncesto de la liga escolar está distribuida normalmente con una media de 178cm y desviación típica de 10cm.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que los jugadores midan más de 188cm?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media sea inferior a 180cm?

QUESTIONS

1.- If A and B are events in a probability space, the statement $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ is correct:

- a) If A and B are disconnected events
b) Only if A and B are independent events
c) For any set of events A and B.

2.- An urn contains six white balls and 4 black ones. If three balls are randomly and simultaneously extracted, the probability of obtaining 2 white balls and one black one is

- a) 35/56 b) 11/32 c) 1/2

3.- If the random variable X follows a distribution, $N(\mu, \sigma)$ we can always assume that the sample mean $\bar{X}$ follows a distribution $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ and therefore

- a) $Z = \frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ follows a distribution $N(\mu, \sigma)$
b) $Z = \frac{X+\mu}{\sigma}$ follows a distribution $N(0,1)$.
c) $Z = \frac{X-\sigma/\sqrt{n}}{\sigma}$ follows a distribution $N(0,1)$.

 03100831	 Septiembre - 2017	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE) PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Duración: 90 min.	100 03 EXAMEN: Tipo B Mixto MODELO 12
Calculadora no programable			Hoja 3 de 4

4.- A matrix A is null if it complies with the following

- a) The majority of the elements of the Matrix are 0
- b) All of the elements of the diagonal are 0
- c) All of the elements of the Matrix are 0

5.- Given the following inequality $5x^2 - 5 > 15 - x$. Points $x=1$ and $x=2$ are:

- a) Both values are solutions of the inequality
- b) None of the values is a solution of the inequality
- c) The value $x=1$ is not a solution and the value $x=2$ is a solution of the inequality

6.- The function $f(x) = \frac{1}{x-1}$ presents a discontinuity at the point $x=1$ of the following type

- a) Essential discontinuity
- b) Jump discontinuity
- c) Removable discontinuity

7.- The function $f(x) = \frac{1}{x-1}$ has

- a) Horizontal asymptote and Vertical asymptote
- b) Vertical asymptote and Oblique asymptote
- c) Oblique asymptote

8.- Given the function $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. The domain of the function is

- a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) $\mathbb{R}$
- c) None of the above

9.- Given the function $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$. It has a minimum in the point

- a) $x = 1$
- b) $x = -1$
- c) It does not have minimums

10.- Calculate $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

- a) $\frac{(\ln(x))^2}{2} + C$
- b) $\frac{\ln(x)}{x^2} + C$
- c) None of the above

 03100831	 Junio - 2018	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE) PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Duración: 90 min.	100 03 EXAMEN: Tipo A Mixto MODELO 01 Hoja 1 de 4
Material: Calculadora no programable			

NOTAS ACLARATORIAS: El examen consta de 10 cuestiones tipo test y 2 problemas. Cada cuestión vale 0,5 puntos y cada problema vale 2,5 puntos. Las cuestiones erróneas restan 0,15 puntos. Las cuestiones se encuentran traducidas al inglés al final del examen. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

CUESTIONES

- La opuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es
 - $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 - La matriz A no tiene opuesta
 - Ninguna de las anteriores
- Una matriz A es escalar si se cumple que
 - Los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1
 - Es diagonal y los elementos de la diagonal son todos iguales
 - Todos los elementos de la diagonal principal son 0
- Dadas las matrices A, de dimensión 4×3 y B de dimensión 3×3 , entonces
 - Se puede obtener el producto de matrices $A \times B$
 - Se puede obtener el producto de matrices $B \times A$
 - No existe el producto de matrices rectangulares
- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, el valor de A^{-1} es
 - $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 - La matriz A no es inversible
- Dada la inecuación $2y + 3x + 3 \leq 4$. Un punto solución es:
 - (0,0)
 - (-5,-5)
 - Todos los anteriores
- La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x < 2 \\ 3, & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ presenta una discontinuidad en el punto $x = 2$ de tipo
 - Inevitable de salto infinito
 - No hay discontinuidad en el punto $x = 2$
 - Discontinuidad evitable
- Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Tiene un mínimo en el punto
 - $x = -1$
 - $x = 0$
 - No tiene mínimos

 03100831	 Junio - 2018	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE) PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto	100 03 MODELO 01 Hoja 2 de 4

Material: Calculadora no programable

8.- Hallar $\int \frac{(5x^3 + 5x^2)}{x^2} dx$

- a) $\left(\frac{5}{2}x^2 + 5\right) + C$ b) $\left(\frac{5}{2}x^2 + 5x\right) + C$ c) Ninguna de las anteriores

9.- El intervalo de confianza para la media muestral dado por $IC = \left(\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ podemos afirmar que el error máximo admisible viene dado por:

- a) $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ b) $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{n}}$ c) $E = Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

10.- La duración de un tipo de baterías tiene un tipo de distribución normal con $\mu = 55$ horas y $\sigma = 6$ horas. El intervalo característico correspondiente a la probabilidad $p = 0.95$ viene dado por

- a) (48'1, 61'9) b) (43'24, 66'76) c) (39'55, 70'45)

Nota : $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

PROBLEMAS

1.- (2,5 puntos). Se considera la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

- a) Razone cuál es el dominio de definición de $f(x)$.
b) Estudiar las asíntotas de la función
c) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

2.- (2'5 puntos) Para realizar un experimento tenemos dos urnas. La urna I tiene 1 bola negra, 3 rojas y 6 verdes mientras que la urna II tiene 2 bolas negras, 6 rojas y 2 verdes. Lanzamos un dado equilibrado. Si sale 1 ó 2 extraemos una bola de la urna I y si sale 3, 4, 5 ó 6 extraemos una bola de la urna II.

- a. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea verde.
b. Si sabemos que, finalmente se ha extraído una bola roja ¿Cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna II

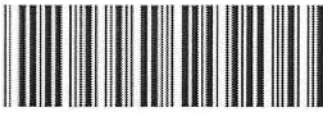
TRADUCCIÓN DEL EXAMEN A INGLÉS

1.- The opposite of the matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ is

- a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) Matrix A has no opposite c) None of the above

2.- A matrix A is scalar if it complies with the following

- a) The elements that do not belong to the principal diagonal are all equal to 1
b) Is diagonal and all of the elements of the diagonal are equal
c) All of the elements of the principal diagonal are 0

 03100831	 Junio - 2018	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		
			Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto
Material: Calculadora no programable				Hoja 3 de 4

Material: Calculadora no programable

3.- Given the matrices A, having a dimension of 4×3 and B of dimension 3×3 , then

- a) The product of matrices $A \times B$ may be obtained
- b) The product of matrices $B \times A$ may be obtained
- c) There is no product of rectangular matrices

4.- Given Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, the value of A^{-1} is

- a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- c) Matrix A is not invertible

5.- Given the inequality $y + 3x + 3 \leq 4$. One point solution is:

- a) (0,0)
- b) (-5,-5)
- c) All of the above

6.- The function $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x < 2 \\ 3, & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$ presents a discontinuity at the point $x = 2$ of the following type

- a) Jump discontinuity
- b) There is no discontinuity in the point $x = 2$
- c) Removable discontinuity

7.- Given the function $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. It has a minimum in the point

- a) $x = -1$
- b) $x = 0$
- c) It does not have minimums

8.- Calculate $\int \frac{(5x^3 + 5x^2)}{x^2} dx$

- a) $\left(\frac{5}{2}x^2 + 5\right) + C$
- b) $\left(\frac{5}{2}x^2 + 5x\right) + C$
- c) None of the above

9.- The confidence interval for the sample mean given by $IC = \left(\bar{X} \pm Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ we can affirm that the maxim admissible error is given by:

- a) $E = Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- b) $E = Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma}{n}}$
- c) $E = Z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

10.- The duration of a battery type has a normal distribution type with $\mu = 55$ hours and $\sigma = 6$ hours.

The characteristic interval corresponding to the probability $p = 0.95$ is given by

- a) (48'1, 61'9)
- b) (43'24, 66'76)
- c) (39'55, 70'45)

Note: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

 03100831	 Septiembre - 2018	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE) PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Duración: 90 min. EXAMEN: Tipo A Mixto	100 03 MODELO 12
Material: Calculadora no programable			Hoja 1 de 4

NOTAS ACLARATORIAS: El examen consta de 10 cuestiones tipo test y 2 problemas. Cada cuestión vale 0,5 puntos y cada problema vale 2,5 puntos. Los cuestiones erróneas restan 0,15 puntos. Las cuestiones se encuentran traducidas al inglés al final del examen. Está permitido el uso de calculadora no gráfica ni programable.

CUESTIONES

1.- Una matriz A es nula si se cumple que

- a) La mayoría de los elementos de la matriz son 0
- b) Todos los elementos de la diagonal son 0
- c) Ninguna de las anteriores**

2.- Una matriz A es diagonal si se cumple que

- a) Es cuadrada y los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1
- b) Todos los elementos de la diagonal principal son iguales
- c) Ninguna de las anteriores**

3.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, el resultado de $B \times A$ es

- a) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$
- b) No es posible realizar el producto $B \times A$
- c) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$**

4.- Una biblioteca tiene 3 plantas, y en cada planta hay salas de estudio y salas de trabajo. En cada sala de estudio hay 4 mesas y 8 sillas y en cada sala de trabajo hay 1 mesa grande y 8 sillas. El número de salas de estudio y salas de trabajo viene dado por la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ siendo la fila 1 la correspondiente a las salas de la planta 1, la fila 2 corresponde a la planta 2 y la fila 3 corresponde a la planta 3. Dado que la primera columna indica el número de salas de estudio y la segunda columna indica el número de salas de trabajo ¿cuántas sillas hay en la planta 3?

- a) 30
- b) 96**
- c) Ninguna de las anteriores

5.- Dada la inequación $7y + 3x - 50 \leq 4$. Un punto solución es:

- a) (6, 5)**
- b) (5, 6)
- c) Ninguno de los anteriores

6.- Si sabemos que el número r es par, entonces el valor del siguiente límite $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^r)$ es

- a) 0**
- b) $-\infty$
- c) El límite no existe

7.- Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$. La función es

- a) Creciente en el intervalo $(0, +\infty)$**
- b) Decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$
- c) Ninguna de las anteriores

 03100831	 Septiembre - 2018	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE)		100
		PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD		03
		Duración: 90 min.	EXAMEN: Tipo A Mixto	MODELO 12
Material: Calculadora no programable				Hoja 2 de 4

8.- Hallar $\int \frac{e^x}{5} + e^{2x} dx$

- a) $\frac{1}{5}e^x + e^{2x} + C$ b) $\frac{1}{5}e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$ c) No es posible calcular la integral

9.- Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ . Se toma una muestra de tamaño n . Para saber si la distribución de las medias muestrales se puede aproximar por una normal

- a. Son imprescindibles todos los datos que se mencionan.
b. Solo se puede eliminar el dato que indica la desviación típica.
c. El único dato relevante es conocer si el tamaño de la muestra es grande ($n \geq 30$)

10.- La variable aleatoria Y sigue una distribución, con media $\mu_y = 180$ y desviación típica $\sigma_y = 24$.

Por tanto, podemos afirmar que las medias $\bar{Y}$ de las muestras de tamaño 25 siguen una distribución:

- a.- $N(180; 4'8)$ b.- $N(18; 24)$. c.- $N(180; 24)$

PROBLEMAS

1.- (2,5 puntos). La universidad imprime cuadernos de apuntes. Sabiendo que quieren que tenga la máxima superficie de escritura y que el perímetro tiene que ser igual a 40, hallar las medidas en alto y ancho del cuaderno y la superficie de la misma.

2.- (2'5 puntos) En una agencia que organiza actividades de ocio y tiempo libre se pueden hacer tres tipos de actividades: senderismo S, rutas en bicicleta B y descensos en canoas C. Consideramos tres categorías de excursionistas: menores de 25 años, entre 25 y 40 y mayores de 40. Conocemos los datos que aparecen en la tabla adjunta.

	Senderismo	Bici	Canoa
Menos de 25	6	72	42
Entre 25 y 40	4	48	28
Mas de 40	10	30	10

Tomamos un excursionista al azar. Calcula las siguientes probabilidades:

- a. Que el excursionista haya hecho senderismo
b. Que el excursionista tenga más de 25 años.
c. Que haya ido en bici sabiendo que era mayor de 40 años

QUESTIONS

1.- A matrix A is null if it complies with the following

- a) The majority of the elements of the Matrix are 0
b) All of the elements of the diagonal are 0
c) None of the above

2.- A matrix A is diagonal if it complies with the following

- a) Is squared and the elements that do not belong to the principal diagonal are all equal to 1
b) All of the elements of the principal diagonal are the same
c) None of the above

 03100831	 Septiembre - 2018	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (PCE) PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Duración: 90 min. EXAMEN: Tipo A Mixto	100 03 MODELO 12
Material: Calculadora no programable			Hoja 3 de 4

3.- Given the matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, the result of $B \times A$ is

- a) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ b) It is not possible to multiply $B \times A$ c) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

4.- A library has 3 floors, and on each floor there are study rooms and work rooms. In each study room, there are 4 tables and 8 chairs and in each work room there is 1 big table and 8 chairs.

The number of study rooms and work rooms is given by the following matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ with row 1 corresponding to the rooms on floor 1, row 2 corresponding to floor 2 and row 3 corresponding to floor 3. Given that the first column indicates the number of study rooms and the second column indicates the number of work rooms, how many chairs are there in floor 3?

- a) 30 b) 96 c) None of the above

5.- Given the inequality $7y + 3x - 50 \leq 4$. One point solution is:

- a) (6, 5) b) (5, 6) c) None of the above

6.- If we know that the number r is even, then the value of the following limit $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^r)$ is

- a) 0 b) $-\infty$ c) The limit does not exist

7.- Given the function $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$. The function is

- a) Increasing in the interval $(0, +\infty)$
b) Decreasing in the interval $(0, +\infty)$
c) None of the above

8.- Calculate $\int \frac{e^x}{5} + e^{2x} dx$

- a) $\frac{1}{5}e^x + e^{2x} + C$ b) $\frac{1}{5}e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$ c) It is not possible to calculate the integral

9.- Let X be a random variable that follows a normal distribution of mean μ and standard deviation σ . Take a sample of size n to know if the distribution of the sample means can be approximated by a normal

- a. All the data mentioned are essential.
b. Only the data indicating the standard deviation can be eliminated.
c. The only relevant data is to know if the size of the sample is large $n \geq 30$

10.- The random variable Y follows a distribution, with mean $\mu_y = 180$ and standard deviation $\sigma_y = 24$.

Therefore, we can affirm that the sample means $\bar{Y}$ of the samples of size 25 follow a distribution:

- a.- $N(180; 4'8)$ b.- $N(18; 24)$ c.- $N(180; 24)$



03100831

Septiembre - 2018

Duración: 90 min.

EXAMEN: Tipo A
Mixto

MODELO 12

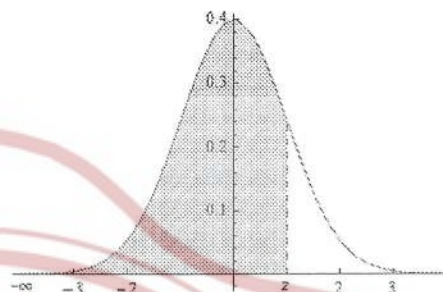
03

Material: Calculadora no programable

Hoja 4 de 4

Función de distribución $N(0,1)$

$$F(x) = P(Z \leq z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

[illegible]